PSI

CONCOURS COMMUN INP 2026

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ COMMENTAIRE GENERAL SUR L'ÉPREUVE

1.1 Le sujet

Le sujet balaye une grande partie du programme : un exercice de probabilités, un exercice d'analyse sur la fonction Γ d'Euler (caractérisation de Bohr–Mollerup), puis un problème d'algèbre linéaire en trois parties sur une classe d'endomorphismes $\mathcal{D}$.

L'énoncé est progressif et permet aux candidats moyens de marquer des points sur les premières questions tout en opérant un bon tri sur la fin. Les questions sont souvent explicites quant à leur articulation (par exemple **Q11** prépare **Q12**), mais une partie des candidats ne lit pas assez l'énoncé et ne perçoit pas ces enchaînements.

Le taux de traitement s'effondre sur la fin du problème (à partir de **Q37**, et surtout **Q38**-**Q43**). Plusieurs correcteurs signalent n'avoir vu *aucune* copie traitant correctement la partie difficile de l'algèbre ; les questions **Q40** à **Q43** ont été abordées par une infime minorité (de l'ordre d'une copie sur deux cents).

Le niveau global est qualifié de médiocre à moyen, sans copies de très haut niveau.

1.2 Rédaction et présentation

Sur la présentation, les avis divergent : certains correcteurs notent une amélioration nette (copies aérées, résultats mis en évidence, questions numérotées et traitées dans l'ordre), d'autres un recul par rapport aux sessions précédentes.

On rappelle qu'une présentation soignée, concise mais incluant les bons arguments, valorise nettement la copie ; à l'inverse, le passage désordonné d'une question à l'autre nuit à la lecture.

Voici des défauts de rédaction récurrents :

• Abréviations obscures et raisonnements insuffisamment explicités.

• Le « récurrence immédiate / évidente » appliqué à un résultat *déjà donné par l'énoncé*, particulièrement mal vu en tête d'une copie par ailleurs très maigre (initialisation et hérédité non rédigées, récurrence parfois ni énoncée ni annoncée).

• Résultats parachutés : formules et lois invoquées sans justification, alors que le barème la demandait explicitement.

• Hypothèses de théorèmes connues de manière plus ou moins approximative (dérivation sous le signe intégrale, IPP généralisée, etc.).

• Manque de soin sur la nature des objets manipulés : on parle de « 3-uplets » ou de vecteurs colonnes là où il s'agit de polynômes, de « dimension d'une famille de vecteurs », etc.

1.3 Bilan par exercice ou problème

• **Probabilités (Ex. 1)**. Partie la mieux réussie pour qui connaît son cours, mais les lois sont souvent reconnues sans être justifiées (barème pénalisant), confusions entre loi géométrique et loi binomiale.

• **Analyse : fonction Γ (Ex. 2)**. Bien abordée globalement ; faiblesses ciblées sur l'intégrabilité *en 0* (vs $+\infty$), la continuité, le caractère défini du produit scalaire, l'inégalité de Cauchy–Schwarz et les hypothèses des théorèmes d'analyse.

• **Algèbre linéaire (Problème)**. Lacunes profondes : critères de diagonalisabilité mal maîtrisés, sev stables de dimension 1 non identifiés aux droites propres, unicité rarement démontrée, conditions de somme directe mal comprises.

1.4 Exemples d'erreurs de raisonnement

• « injective de E vers F en dimension finie ⇒ isomorphisme » (sans argument de dimension) ;
• « matrice triangulaire supérieure ⇒ diagonalisable » ;
• « non symétrique réelle ⇒ non diagonalisable » ;
• « det M = 0 (ou $0 \in \mathrm{Sp}$) ⇒ non diagonalisable » ;
• « une colonne nulle ⇒ non diagonalisable » ;
• « non semblable à l'identité ⇒ non diagonalisable » ;
• « polynôme caractéristique non scindé à racines simples ⇒ non diagonalisable » (le grand classique) ;
• « la réunion de deux familles libres est libre » ;
• « $(u(x) - ax)^2 = 0 \Rightarrow u(x) - ax = 0$ ».
• $\ln t \sim (t - 1)$ en 0
• « le produit de deux fonctions intégrables est intégrable »
• prolongements par continuité abusifs (y compris en $+\infty$).

2/ ANALYSE DÉTAILLÉE DES QUESTIONS

Exercice 1 – Probabilités : Un jeu de pile ou face

Q1 : *Dérivées successives de $f : x \to 1/(1-x)$ (récurrence sur $f^{(k)}$).*
Question globalement réussie.
Deux travers opposés : certains se contentent d'une « récurrence immédiate » sans la rédiger (parfois en traitant seulement k = 0, 1, 2), tandis que beaucoup perdent du temps à justifier inutilement le caractère $\mathscr{C}^k$. Environ la moitié des candidats ne sait pas dériver directement une expression du type $1/(1+x)^{k+1}$ et passe par la dérivée d'un quotient, au prix de simplifications fastidieuses.

Q2 : *Lien avec un développement en série entière / dérivation terme à terme*.
La partie calculatoire est généralement correcte, mais la justification est lacunaire : le rayon de convergence n'est presque jamais précisé et le théorème de dérivation terme à terme rarement cité. Usage du binôme de Newton ou de Taylor sans justification ; DSE de $(1 + x)^{\alpha}$ parfois mobilisé.

Q3 : *Préciser la loi de X (loi géométrique)*.

Question de cours en général correcte ; justification précise dans environ trois quarts des copies. La loi géométrique est globalement reconnue.

Q4 : *Loi conditionnelle $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$ (loi binomiale)*.

Résultats beaucoup plus inégaux. Beaucoup oublient le coefficient binomial ou se contentent d'écrire (parfois mal) la définition d'une probabilité conditionnelle. La loi binomiale est moins bien identifiée que la géométrique et le choix de la loi est rarement justifié. Quelques réponses incongrues.

Q5 : *$\mathbb{P}(Y = k)$ via la formule des probabilités totales*.

Formule des probabilités totales souvent appliquée mais fréquemment incomplète, parachutée, voire fausse ; le système complet d'événements n'est pas toujours explicité.

Q6 : *Établir une formule (somme de série géométrique)*.

Moins abordée, mais plutôt bien réussie quand elle est entamée. La somme géométrique et sa condition de convergence ne sont pas toujours explicitées ; calculs laborieux ou faux chez certains.

Q7 : *Établir une relation pour tout $k \geq 1$ (réinvestit **Q1**–**Q2**)*.

Peu abordée. Ceux qui font le lien avec les deux premières questions s'en tirent bien. Le paramètre (du type $1 - p^2$) appartenant au disque ouvert de convergence est rarement vérifié.

Exercice 2 – Analyse : Une caractérisation de la fonction Γ (théorème de Bohr-Mollerup)

Q8 : *Γ bien définie sur R_+^* et $\Gamma(x) > 0$ (continuité, intégrabilité en 0 et $+\infty$, stricte positivité).*

Traitée par presque tous. Points faibles récurrents :

- continuité de l'intégrande souvent passée sous silence ($\approx$ la moitié des copies) ;
- problème en 0 pas toujours repéré ; convergence en $+\infty$ mieux réussie ;
- confusion entre intégrabilité et limite en $+\infty$; croissances comparées invoquées sans justification ;
- pour $\Gamma(x) > 0$, on se contente de la « positivité de l'intégrale » ; le bon argument de stricte positivité n'est cité qu'exceptionnellement.

Q9 : *$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x)$ (intégration par parties généralisée)*.

Bien réussie. L'IPP est identifiée mais ses hypothèses d'utilisation et la convergence du crochet sont souvent justifiées trop succinctement ou les arguments sont donnés dans le désordre.

Q10 : *Encadrement de $t^{x-1} e^{-t}$ (disjonction $t \leq 1$/ $t \geq 1$)*.

Énoncé facilité par le résultat donné. Majoritairement bien traitée, avec la disjonction des cas. Manque parfois la justification des variations de $x \to t^{x-1}$ selon que $t \in]0, 1[$ ou $t > 1$, variation qui dépend de t, non de x (erreur fréquente).

Q11 : *Intégrabilité de* $\psi_k(t) = |\ln t|^k t^{\cdots}$ *(en* 0 *et* $+\infty$*).*

Point le plus discriminant de l'analyse. L'intégrabilité en $+\infty$ est bien traitée ; celle en 0 très rarement justifiée correctement. Peu savent comparer à une intégrale de Riemann au voisinage de 0.

Justifications fantaisistes : $|\ln t|^k t^{a-1} \to 0$ en 0, $|\ln t| \leq t$ ou « négligeable devant $1/\sqrt{t}$ ». Certains traitent séparément $k = 0, 1, 2$ sans voir que l'argument est commun.

Q12 : Γ *de classe* $\mathscr{C}^2$ *; expressions intégrales de* Γ' *et* Γ'' *(dérivation sous le signe intégrale).*

« Figure imposée » : le théorème est cité mais ses hypothèses (en particulier la domination) ne sont pas vraiment justifiées, malgré la **Q11** qui y invitait.

Erreurs fréquentes : dérivation par rapport à t au lieu de x (rédhibitoire pour la suite), valeurs absolues parasites dans les expressions des dérivées partielles et qui se retrouvent dans celles de Γ' *et* Γ'' confusions de variables.

Q13 : $\langle u, v \rangle = \int_\alpha^\beta uv$ *est un produit scalaire.*

Traitée par presque tous comme une application directe du cours. Faiblesses sur la partie à fort contenu : le caractère défini positif n'est justifié précisément que dans environ la moitié des copies, et la continuité de la fonction y est souvent oubliée. Confusion sur la définition : « défini positif » compris à tort comme $\langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$. Définition de la symétrie/bilinéarité parfois omise ; théorèmes non nommés.

Q14 : *Cauchy–Schwarz + convexité (log-convexité,* g''*).*

Peu réussie. L'inégalité de Cauchy– Schwarz est mal appliquée (tentative erronée : intégrale du produit = produit des intégrales) ; le passage de $[\alpha, \beta]$ à $\mathbb{R}^+$ est passé sous silence. Peu donnent la bonne expression de g''. Certains marquent des points sur la synthèse (récapitulatif des points précédents) ou via le calcul de $\Gamma(1)$. La convexité est mieux traitée que la majoration.

Q15 : *Récurrence :* $f(x+n) = \ldots, f(n+1) = n!$.

Récurrence assez facile, en général bien traitée, malgré quelques « récurrences immédiates » non rédigées et des initialisations bâclées. Erreur notable : oubli du logarithme dans la propriété de morphisme conduisant à $g(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Q16 : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ */ adapter la question précédente.*

Généralement bien réussie. Certains relancent une récurrence inutile au lieu d'adapter la question **Q15**. La validité de $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour $a, b > 0$ n'est presque jamais mentionnée.

Q17 : *Application du Lemme 1 (deux inégalités), convexité de g.*

Le principe du lemme est compris, mais son application manque de rigueur : l'une des deux inégalités est obtenue correctement, l'autre rarement (hypothèses non vérifiées, mauvais choix de paramètre). La convexité de g est tantôt citée, tantôt oubliée.

Q18 : *Encadrement fin / recul sur les résultats précédents.*

Peu traitée. Encadrement parfois obtenu mais conclusion rarement probante ; souvent des bribes de raisonnement. *Remarque :* quelques copies très maigres tentent isolément cette question sans avoir traité le reste de l'analyse.

Q19 et Q20 : $f = \Gamma$ *sur* $]0, 1]$*, puis* $f = \Gamma$ *(unicité, conclusion de Bohr–Mollerup).*

Très peu abordées et rarement réussies (**Q19** très sélective, **Q20** un peu moins). L'idée d'unicité est parfois comprise sans être rédigée rigoureusement.

Problème – Algèbre linéaire : Une classe d'endomorphisme : la classe $\mathcal{D}$

Partie I – Deux exemples (en dimension 3) ($\mathrm{K}_2[X]$)

Q21 : *Matrice de u dans la base canonique de* $\mathrm{K}_2[X]$ *; diagonalisable ?*

Matrice majoritairement bien établie (avec quelques échecs, notamment des matrices écrites à l'envers), polynôme caractéristique souvent correct. La conclusion de non-diagonalisabilité concentre les fautes.

Énormément d'arguments faux : « pas scindé à racines simples », « non inversible », « triangulaire donc diagonalisable ». Une part des candidats donne tout de même un argument correct.

Q22 : Ker $u^2 = \mathrm{K}_1[X]$*, stable par u.*

Question d'apparence facile mais piégeuse : calculs faux, arguments de stabilité flous (il suffisait de constater que u et u^2 commutent). Beaucoup donnent le résultat sous forme d'un espace de vecteurs colonnes sans revenir aux polynômes (confusion 3-uplets / polynômes : ex. le « vecteur $(1, 2, 2)$ » au lieu du polynôme $1 + 2X + 2X^2$).

Q23 : *Base* $\mathcal{B}$ *où* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale par blocs.*

Globalement bien traitée, même si certains n'écrivent pas correctement la matrice en colonnes pour les vecteurs images. Résoudre une équation aux éléments propres reste une réelle difficulté pour beaucoup, des erreurs de calculs viennent souvent polluer le résultat.

Q24 : *Matrice de v dans la base canonique.*

Très majoritairement bien établie ; peu de candidats pensent à la valeur propre 0. (Mêmes écueils d'écriture que **Q21** pour une minorité.)

Q25 : *Sous-espaces vectoriels de dimension 1 stables par v (= droites propres).*

Peu réussie. Une très faible proportion comprend qu'un *sous-espace vectoriel* stable de dimension 1 est nécessairement une droite propre ; la plupart des candidats se contentent de montrer la stabilité de $\mathrm{K}_1[X]$. Le lien avec les sous-espaces propres est rarement fait ; l'unicité n'est qu'exceptionnellement démontrée.

Q26 : $\mathrm{K}_1[X]$ *est le seul plan stable par v + unicité.*

Stabilité de $\mathrm{K}_1[X]$ souvent établie ; l'unicité est ratée par la quasi-totalité des candidats.

Erreur de fond très répandue : croire que les seuls sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathrm{K}_2[X]$ sont $\mathrm{Vect}(1, X)$, $\mathrm{Vect}(1, X^2)$, $\mathrm{Vect}(X, X^2)$ (même travers en dimension 1). Justifications confuses ; affirmer l'unicité n'est pas la démontrer.

Q27 : $v \notin \mathcal{D}$ *(synthèse des questions précédentes).*

Ceux qui ont vu qu'il s'agissait d'une synthèse des questions précédentes s'en sortent.

Q28 : $\mathcal{D}$ *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E)$?

Polarisante, moyennement réussie et peu justifiée. Peu de candidats voient que les cas étudiés permettaient de construire un contre-exemple ; le lien avec les questions précédentes n'est pas fait. Source d'incompréhensions.

Partie II – Le cas des endomorphismes nilpotents

Q29 : *Que dire de* u *si* $\dim E = 1$ *? (*$u = 0$*).*

Question de cours vue par la plupart, mais réponse souvent donnée sans justification ; arguments parfois flous voire faux.

Q30 : *La famille* $(u^{k-1}(x), \ldots, u(x), x)$ *est libre.*

Bonne connaissance de la définition d'une famille libre ; démonstration globalement réussie.

Travers : preuves trop rapides, compositions successives avec u et conclusions instantanées. L'argument souvent rencontré de « polynômes échelonnés en degré » était hors propos.

Q31 : *En déduire* $k = 2$*, puis* $u \in \mathcal{N}_2$.

Le point essentiel est souvent vu mais rédigé sans précision : l'inégalité $k \geq 2$ n'est clairement justifiée que dans une moitié de copies. Beaucoup concluent à tort que le cardinal de la famille libre vaut directement la dimension de l'espace. Rédaction parfois lapidaire.

Q32 : $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Peu traitée et le plus souvent non comprise (nécessite une bonne lecture de l'énoncé). Quelques bonnes réponses isolées.

Q33 : $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$ *et* $r \leq n - r$ *(théorème du rang).*

Question plutôt facile, très bien réussie par la grande majorité de ceux qui l'atteignent ; bon gisement de points.

Q34 : $(e_1, \ldots, e_{n-r}, f_1, \ldots, f_r)$ *est une base de* E.

Réponses soit excellentes, soit complètement fausses.

Erreurs typiques : invoquer le théorème de la base incomplète à tort ou supposer (faux) que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont supplémentaires – alors même que **Q33** donne $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. Mieux réussie quand on commence par établir la liberté.

Q35 : *Base* $\mathcal{B}$ *où* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est diagonale par blocs (cas nilpotent).*

Très mal / peu traitée. Ceux qui ont réussi **Q34** voient comment construire la base, mais beaucoup utilisent la base de **Q34** sans réordonner les vecteurs dans le bon ordre. Nécessite une bonne compréhension de l'énoncé.

Q36 : $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$

Peu abordée mais bien traitée par ceux qui s'appuient sur les résultats précédents (démontrés ou non). Argumentation parfois succincte.

Partie III – Critère d'appartenance à $\mathcal{D}$ (polynômes annulateurs)

Q37 : φ **:** $\mathrm{K}_1[X]^2 \to \mathrm{K}_3[X]$ *: linéarité, injectivité, surjectivité (isomorphisme).*

Très mal réussie, y compris la linéarité (beaucoup d'erreurs, certains croient devoir prouver une *bi* linéarité). L'injectivité n'est pratiquement jamais correctement traitée ; l'argument de dimension « injective $\Leftrightarrow$ bijective » est oublié. Au mieux (et rarement) la linéarité et la conclusion sont justifiées. Aucun candidat n'a traité correctement l'intégralité de la question.

Q38 – Q43 : *Intersection* $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})^2 \cap \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})^2 = 0$ *; sommes directes ; polynôme annulateur P ; décomposition de* 1 *sur* $\mathcal{B}$ *; conclusion* $u \in \mathcal{D}$.

Partie très rarement traitée et jamais de façon complète et juste.

Erreur de fond signalée sur les sommes directes : retenir l'intersection deux à deux nulle comme caractérisation d'une somme directe y compris pour plus de deux sous-espaces (condition insuffisante). Rappel : dans un espace vectoriel, les « puissances d'un vecteur » n'ont en général pas de sens.