MPI

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 2

1/ THÈME DE L'ÉPREUVE

Ce sujet proposait deux exercices et un problème.

Le premier exercice permettait aux candidats, en étant guidés, de calculer les puissances d'une matrice 3.3 par deux méthodes différentes. L'une des méthodes consistait à déterminer, sans calculs, le polynôme minimal d'une matrice diagonalisable, puis de trouver le reste dans la division euclidienne de X^n par π_A. La seconde méthode utilisait la formule du binôme de Newton en prenant bien soin de distinguer le cas $k = 0$.

Un second exercice proposait de démontrer un résultat sur le produit des images des racines *n*-ièmes de l'unité par un polynôme à coefficient réels et ce, en passant par des arguments de réduction de matrices. Il commençait par demander au candidat de tester le résultat sur un polynôme de leur choix.

Le problème portait sur les polynômes de Laguerre, les notions de produit scalaire, de construction d'une base orthonormée et de recherche du projeté orthogonal sur un sous espace vectoriel de dimension finie.

À noter une erreur dans le sujet : à la question Q15. « Exprimer $\left\langle g \middle| h_n^{(n)} \right\rangle$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) \mathrm{d}t$ » devait être « exprimer $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) \mathrm{d}t$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) \mathrm{d}t$ » (et non « exprimer $\int_0^{+\infty} g(t) h_n^{(n)}(t) \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ en fonction de $\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t) h_n(t) \mathrm{d}t$ »).
Les correcteurs auront fait preuve de bienveillance dans leur correction. Le barème a été adapté.

2/ REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet a permis d'évaluer et de classer les candidats sur des compétences assez variées, avec une part importante accordée à l'algèbre linéaire matricielle (réduction et autres aspects) dans les exercices, mais aussi à d'autres chapitres d'algèbre et à l'intégration dans le problème.

Il a révélé une grande disparité de niveaux - et des points de fragilité assez répandus dans certaines questions proches du cours comme en début de problème - mais sa structure (et longueur) raisonnables ont fait que, même des candidats de niveau moyen ont pu se mettre en valeur dans certaines questions en fin d'exercice ou milieu/fin de problème et y rapporter quelques points.

La moyenne est de 10,36 avec un écart-type de 4,48.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

EXERCICE 1

Q1. Le rang de la matrice *J* a été globalement bien déterminé. En revanche, la justification de sa diagonalisation est trop parfois lacunaire ou absente.

Q2. Certains candidats ne font pas le lien avec la question 1 et ne répondent pas à la consigne « en déduire ».

Q3. Peu justifient correctement (sans calcul) le polynôme minimal. La justification du caractère scindé à racines simples a été très souvent absente de la rédaction.

Q4a. Question rarement abordée. Beaucoup ne savent pas trouver le reste et certains tentent, en vain, de faire la division.

Q4b. Aucun souci majeur sur les puissances de *J* avec la récurrence rédigée ou non. En revanche, bien plus de difficultés dans la simplification de la somme obtenue à l'aide du binôme de Newton : notamment l'oubli de la condition *k* supérieur ou égal à 1 pour la puissance de *J.*

EXERCICE 2

Q5. La valeur de la somme a majoritairement été trouvée. En revanche, plus de la moitié des candidats qui ont tenté la 2e partie de la question ont choisi un polynôme qui ne satisfaisait pas les hypothèses demandées.

Q6. La détermination du polynôme caractéristique de *J* n'est pas toujours maîtrisée. On déplore de nombreuses « escroqueries » de rédaction, avec des calculs de déterminants manifestement truqués ou forcés pour aboutir au résultat.

Q7. La comparaison entre la matrice *A* et *P(J)* est globalement bien traitée.

Q8. La question a été majoritairement bien traitée en termes de résultats mais pas en termes de rédaction. Souvent *J* a été diagonalisée sans justifier que c'était possible.

Q9. Lorsque les questions précédentes étaient faites, celle-ci n'a pas trop posé de problème.
Quelques candidats se sont posés la question du cas où 1 était racine de *P*.

PROBLÈME

Q10a. Rédaction très brouillonne. Peu de candidats ont réellement répondu à la question en se basant sur les hypothèses données dans l'énoncé. La plupart a plutôt cherché à se ramener à une démonstration de cours utilisant des résultats non supposés ici.
L'espace *E* n'étant pas de dimension finie *a priori*, le théorème de la base incomplète ne s'applique pas ici.

Q10b. Même remarque que pour la question précédente avec un peu plus de réussite.

Q11. La manipulation de la valeur absolue est mal maîtrisée par beaucoup de candidats.
Pour la 2e partie, les candidats ont souvent vu le rapport avec l'inégalité démontrée juste avant.
Erreur rencontrée : "le produit de deux fonctions intégrables est intégrable" !

Q12. Pour la partie espace vectoriel, dans l'ensemble, c'était plutôt bien fait même si de nombreux candidats ont fait quelques confusions sur la définition de *E*, pensant qu'il fallait juste montrer la continuité.
Pour la partie produit scalaire, la linéarité a souvent été affirmée sans justification de la convergence des différentes intégrales et le caractère défini a souvent été fait très approximativement avec l'absence du caractère continu de la fonction dans l'intégrale.
Pour certaines copies, la linéarité se réduit soit à l'additivité soit à l'homogénéité.

Q13. La question a été mal traitée en grande partie. Beaucoup de candidats ont soit oublié de démontrer que *F* était bien inclus dans *E*, soit ont voulu démontrer que *F* était un sev de *E* en montrant l'appartenance à *E* de la combinaison linéaire d'éléments de *F*.
Méconnaissance également de la définition d'équivalence en $+\infty$, avec des équivalents souvent faux (exemple : tels $t^{2k}e^{-t}$ équivalent à $e^{-\frac{t}{2}}$ en l'infini).

Q14a. Quelques candidats ont tenté une récurrence, très souvent fausse et non aboutie. Peu d'erreurs pour ceux qui ont utilisé Leibniz.

Q14b. Réussie par ceux qui ont bien répondu à la Q14a.
Dans certaines copies, on trouve que exp est un polynôme de degré infini !!

Q15. Des tentatives infructueuses sur la partie avec l'erreur d'énoncé et peu de bonnes tentatives sur la 2e partie. Des candidats ont quand même réussi la question en laissant de côté la première égalité à démontrer.

Q16. Peu de réussite. Certains candidats ont pressenti le résultat et ont essayé de passer en force en donnant une intégrale qui visiblement n'était pas convergente et dont ils affirmaient qu'elle était nulle.

Q17. L'existence et le calcul de l'intégrale ont rarement été justifiés parfaitement mais, dans l'ensemble, les candidats ont trouvé le bon résultat par récurrence directe.

Q18. Bien faite pour ceux qui ont réussi les questions précédentes. Certains ont admis les résultats (non démontrés) pour conclure sur la famille des L_i.

Q19. Peu traitée correctement avec la convergence de la série mal justifiée (passent à la limite pour dire ensuite que la limite existe). La majoration a été trouvée lorsque la première partie de la question était bien traitée.

Q20. L'appartenance à *E* a généralement été bien traitée. La 2e partie de la question a été rarement abordée.

4/ CONCLUSION

On rappelle à tous les candidats que la rigueur et la clarté des raisonnements et des copies sont des attendus essentiels des concours. Les correcteurs valorisent ainsi, entre autres :

- le soin apporté aux copies ;
- la rigueur des calculs et des raisonnements présentés ;
- la connaissance précise des théorèmes du programme, ainsi que les preuves des points importants.

Les candidats sont invités à fournir des efforts en ce sens ; un candidat de niveau moyen qui a travaillé doit pouvoir obtenir au moins la moyenne.

Voici quelques conseils pour les futurs candidats :

1. Éviter d'essayer « d'escroquer » les correcteurs en « trafiquant les calculs » ; ceci indispose fortement le correcteur.

2. Chaque hypothèse d'une question doit être utilisée et le candidat doit écrire sur sa copie à quel moment cette hypothèse est utile.

3. Certaines réponses peuvent tenir en une ou deux lignes.

4. Citer TOUS les théorèmes utilisés et rappeler sur le moment toutes les hypothèses utiles, même si

elles figurent quelques lignes plus haut ou à la question précédente.

5. Numéroter les copies et les rendre dans le bon ordre. Traiter les questions dans l'ordre de l'énoncé.
6. Commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet ; vous pourrez ainsi mieux vous imprégner du texte.
7. C'est perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.
8. Prendre le temps de bien comprendre la question avant de répondre.
9. Soigner la présentation.
10. Éviter, dans une démonstration, d'utiliser le résultat qui doit être prouvé.