9. Calcul matriciel

Fiche de cours

En filière MPSI ou MP2I, $\mathbb{K}$ désigne un corps. En filière PCSI, PTSI ou BCPST, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Def. : ensemble des matrices

Une **matrice** de taille (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$, représentée sous la forme d'un tableau. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le coefficient de ligne i et de colonne j est noté a_{ij} .
Notation : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
Si $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les opérations suivantes :

- **addition** : $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
- **multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$** :
$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$
- **transposée** : $A^\top = (a_{ji})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

Def. : matrices élémentaires

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. La matrice élémentaire E_{ij} est définie par
$$E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$
Autrement dit, c'est la matrice qui a un 1 en position (i,j) et 0 ailleurs.

> Toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires.

Def. : matrices particulières

- **matrice colonne** : matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
- **matrice ligne** : matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$
- **matrice nulle** : $0_{n,p} = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
- **matrice identité** : $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$

Prop. : propriétés de la somme

La somme de deux matrices est associative, commutative, admet un élément neutre $0_{n,p}$, et toute matrice A admet une matrice opposée, $-A$.

Rem : structure de $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ (MPSI/MP2I uniquement)

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de la loi d'addition $+$ est un groupe abélien.

Def. : ensembles usuels de matrices

- **matrices carrées** d'ordre n : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- **matrices diagonales** : $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ si pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$
- **matrices triangulaires**[1] **supérieures** (resp. **inférieures**) : $A \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^{\text{inf}}(\mathbb{K})$) si pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \geqslant j$ (resp. $i \leqslant j$) $\Rightarrow a_{ij} = 0$
- **matrices symétriques** : $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ si pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$
- **matrices antisymétriques** : $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ si pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ji} = -a_{ij}$

1. on définit de même les matrices triangulaires supérieures ou inférieures strictes en exigeant en plus que la diagonale soit nulle

Def. : produit matriciel

Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit le produit $A \times B$ (ou plus simplement AB) par

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

On a alors $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Attention à la compatibilité des dimensions !

Rem : structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (MPSI/MP2I uniquement)

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni des lois $+$ et $\times$, est un anneau, non commutatif dès que $n \geqslant 2$.

Prop. : propriétés du produit matriciel

- Le produit matriciel est bilinéaire, donc distributif par rapport à l'addition, et associatif.
  - Le produit matriciel n'est pas commutatif si $n \geqslant 2$ ou $p \geqslant 2$ ou $q \geqslant 2$.
  - Il existe des diviseurs de zéro, c'est-à-dire qu'on peut avoir $AB = 0_{n,q}$ avec $A \neq 0_{n,p}$ et $B \neq 0_{n,q}$.
- Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit est une loi de composition interne qui admet pour élément neutre I_n.
- Pour $(A,B) \in (\mathcal{T}_n^{\text{sup}})^2$ (resp. $(\mathcal{T}_n^{\text{inf}})^2$), $AB \in \mathcal{T}_n^{\text{sup}}$ (resp. $\mathcal{T}_n^{\text{inf}}$). La diagonale de AB s'obtient par produit terme à terme des diagonales de A et B.

Prop. : propriétés de la transposée

- $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $\left(A^\top\right)^\top = A$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$
- $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^\top = A$
- $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^\top = -A$

Prop. : formule du binôme de Newton

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**, i.e. telles que $AB = BA$. Alors, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Def. : opérations élémentaires

- **opérations élémentaires sur les lignes**
  Soit $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  - **dilatation** : multiplication d'une ligne L_i par $\lambda \in \mathbb{K}$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$
  - **transposition** : échange des lignes L_i et L_j, avec $i \neq j$, notée $L_i \leftrightarrow L_j$
  - **transvection** : ajout de βL_j à L_i, avec $\beta \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$, notée $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$
- **opérations élémentaires sur les colonnes**
  Soit $A = (C_1|\cdots|C_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  - **dilatation** : multiplication d'une colonne C_i par $\lambda \in \mathbb{K}$, notée $C_i \leftarrow \lambda C_i$
  - **transposition** : échange des colonnes C_i et C_j, avec $i \neq j$, notée $C_i \leftrightarrow C_j$
  - **transvection** : ajout de βC_j à C_i, avec $\beta \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$, notée $C_i \leftarrow C_i + \beta C_j$

Def. : matrices d'opérations élémentaires

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- **matrice de dilatation** :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)\,E_{i,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- **matrice de transposition** :

$$P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

- **matrice de transvection** :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Prop. : opérations élémentaires et matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- $D_i(\lambda)A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftarrow \lambda L_i$ à A.
- $P_{i,j}A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftrightarrow L_j$ à A.
- $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue en appliquant $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ à A.
- $AD_i(\lambda)$ est obtenue en appliquant $C_i \leftarrow \lambda C_i$ à A.
- $AP_{i,j}$ est obtenue en appliquant $C_i \leftrightarrow C_j$ à A.
- $AT_{i,j}(\lambda)$ est obtenue en appliquant $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ à A.

Def. : matrice nilpotente

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$. Le plus petit entier p vérifiant cette propriété est appelé **indice de nilpotence** de A.

Méthode : équation matricielle d'un système linéaire

Tout système linéaire de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

peut se reformuler sous forme matricielle :

$$AX = B$$

avec

- $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la **matrice du système linéaire**,
- $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ le **vecteur des inconnues**,
- $B = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le **second membre**.

Def. : système homogène associé

Le **système homogène associé** au système représenté par l'équation matricielle $AX = B$ est le système associé à l'équation matricielle $AX = 0_{n,1}$

Def. : système compatible

Le système $AX = B$ est dit **compatible** si B s'exprime comme combinaison linéaire des colonnes de A.

Prop. : solutions d'un système compatible

Soit $AX = B$ un système linéaire, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Il admet des solutions dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si il est compatible.
- Dans ce cas, les solutions sont de la forme $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière du système $AX = B$ et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Def. : matrices inversible et groupe linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- A est dite **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
- Alors, B est unique, notée A^{-1} et appelée **l'inverse de** A.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: **groupe linéaire** : ensemble des matrices carrées de taille n inversibles

Prop. : lien avec les matrices élémentaires

Toute matrice inversible est le produit d'un nombre fini de matrices d'opérations élémentaires.

Prop. : propriétés de l'inverse

Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$.

- $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. $\lambda A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.
- $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.
- Si $A = \mathrm{diag}\,(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d_i \neq 0_\mathbb{K}$, et alors $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{d_1}, \ldots, \dfrac{1}{d_n}\right)$.
- Si $A \in \mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K})$), $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{ii} \neq 0_\mathbb{K}$. Alors, $A^{-1} \in \mathcal{T}_n^{\sup}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{K})$), et la diagonale de A est donnée par $\left(\dfrac{1}{a_{11}}, \ldots, \dfrac{1}{a_{nn}}\right)$.
- Pour $\mu \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,
  - $D_i(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D_i(\lambda)^{-1} = D_i\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$
  - $P_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P_{ij}^{-1} = P_{ji} = P_{ij}$
  - $T_{i,j}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$

Prop. : inverse d'une matrice 2×2

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0_\mathbb{K}$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rem : structure de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (MPSI/MP2I uniquement)

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, muni de la loi $\times$, est un groupe, non abélien dès que $n \geqslant 2$.

Prop. : caractérisation des matrices inversibles par les systèmes linéaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(ii) Le système homogène $AX = 0_{n,1}$ admet pour seulement solution le vecteur nul $0_{n,1}$.

(iii) Pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire $AX = B$ admet une unique solution.