16.1 Probabilités sur un univers fini

Fiche de cours

Def. : univers

Dans le cadre de la modélisation d'une expérience aléatoire, l'**univers** Ω désigne un ensemble non vide. Les éléments ω de Ω sont appelées **issues**.

On considère un univers Ω fini fixé.

Def. : évènements

- Un **évènement** de Ω est une partie de Ω, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
- $\emptyset$ est l'**évènement impossible**, Ω est l'**évènement certain**.

Soient A et B deux évènements de Ω.

- l'**évènement contraire** de A est le complémentaire de A dans Ω, noté $\bar{A}$;
- l'évènement $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$ désigne l'union $A \cup B$;
- l'évènement $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ désigne l'intersection $A \cap B$;
- Si $A \subset B$, on dit que l'évènement A **implique** ou **entraîne** l'évènement B ;
- A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.
- Pour $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ est un **évènement élémentaire**

Def. : probabilité

Une **probabilité** sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- pour tout couple (A, B) d'évènements incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé fini**.

Def. : probabilité uniforme

L'application $\mathbb{P}$ définie, pour tout évènement A de Ω, par $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$, est une probabilité, appelée **probabilité uniforme** sur Ω. On parle de situation d'**équiprobabilité**.

On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Prop. : propriétés d'une probabilité

A et B deux évènements.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$

Prop. : probabilité d'une réunion

1. Pour tout couple (A, B) d'évènements de Ω,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
2. **sous-additivité** : pour tout k-uplet $(A_1, \dots, A_k)$ d'évènements de Ω,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$
3. Si les évènements $A_1, \dots, A_k$ sont deux à deux incompatibles, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)$$

Prop. : construction d'une probabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un univers fini et $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

(ii) $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Une telle probabilité $\mathbb{P}$ est alors unique, et pour tout évènement A de Ω, on a
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \text{t.q. } \omega_i \in A}} p_i$$

Def. : distribution de probabilités

Une **distribution de probabilités** sur un ensemble fini E est une famille $(p_x)_{x \in E} \in (\mathbb{R}_+)^E$ telle que $\displaystyle\sum_{x \in E} p_x = 1$.

Def. : probabilité conditionnelle

Soit B un évènement de Ω avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

- Soit A un évènement de Ω. La **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $\mathbb{P}_B(A)$ ou $\mathbb{P}(A\,|\,B)$, est définie par
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$
- L'application $\mathbb{P}_B : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) \end{pmatrix}$ est la **probabilité conditionnelle sachant B**.

Th. : formule des probabilités composées

Soit $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ des évènements de Ω tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j}(A_i)$$

Def. : système complet d'évènements

Un système complet d'évènements (s.c.e.) de Ω est un ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ d'évènements de Ω tel que :

- $\forall\, i \in [\![1, k]\!],\ A_i \neq \emptyset$
- $\forall\, (i, j) \in [\![1, k]\!]^2,\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$

Prop. : somme des probabilités dans un s.c.e.

Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un s.c.e., alors $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i) = 1$.

Th. : formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ un s.c.e. Pour tout évènement B de Ω,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

Rem : cas particulier : $\{A, \bar{A}\}$

Soit A un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$.
Pour tout évènement B de Ω,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\bar{A}\right) \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Th. : formule de Bayes

- Soient A et B deux évènements de Ω avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$
- Si $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un s.c.e., alors pour tout évènements B de Ω tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$,
$$\mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\, \mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i)\, \mathbb{P}_B(A_i)}$$

Def. : évènements indépendants

- Soient A et B deux évènements de Ω. A et B sont **indépendants** si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

indépendants $\neq$ incompatibles

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ n évènements de Ω.

- $A_1, \dots, A_n$ sont **deux à deux indépendants** si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants.
- $A_1, \dots, A_n$ sont **indépendants** si pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

indépendants $\Rightarrow$ deux à deux indépendants mais réciproque fausse

Prop. : indépendance et évènements contraires

Soient $A_1, \dots, A_k$ des évènements de Ω, et pour $i \in [\![1, k]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$. Alors $A_1, \dots, A_k$ sont indépendants (resp. 2 à 2 indépendants) $\iff$ $B_1, \dots, B_k$ sont indépendants (resp. 2 à 2 indépendants).