15. Dénombrement

Fiche de cours

Def. : ensemble fini

Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une injection $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$. Dans le cas contraire, E est dit **infini**.

Prop. : propriétés des ensembles finis

- Toute partie d'un ensemble fini est finie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \subset [\![1, n]\!]$ non vide. Alors il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que A est en bijection avec $[\![1, m]\!]$.
- Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. S'il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, m]\!]$, alors $n = m$.

Prop. : caractérisation des ensembles finis

Soit E un ensemble non vide. E est fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une **bijection** $\varphi : E \to [\![1, n]\!]$. Un tel entier est alors unique.

Def. : cardinal

On l'appelle le **cardinal** de E, noté $|E|$ ou $\operatorname{card}(E)$. On pose par ailleurs $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

Prop. : cardinal et bijection

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Si F est un ensemble en bijection avec E, alors F est fini de cardinal n.

Prop. : cardinal et opérations ensemblistes

Soient E et F deux ensembles finis.

- Si E et F disjoints, alors $E \cup F$ est fini et $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.
- Dans le cas général, on a
$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$$

Soit E un ensemble fini, A et B deux parties de E.

- $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B)$
- $\operatorname{card}({}^cA) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$
- $\operatorname{card}(A) \leqslant \operatorname{card}(E)$, avec égalité si et seulement si $A = E$.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$.

Prop. : cardinal et applications

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$.

- Si f est injective et F fini, alors E est fini et $\operatorname{card}(E) \leqslant \operatorname{card}(F)$.
- Si f est surjective et E fini, alors F est fini et $\operatorname{card}(E) \geqslant \operatorname{card}(F)$.

On suppose de plus que E et F sont finis.

- Si $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

- On désigne par F^E les applications de E dans F. F^E est fini et $\operatorname{card}\left(F^E\right) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$

Def. : p-liste, p-arrangement, permutation

Soit E un ensemble, $p \in \mathbb{N}^*$.

- Une ***p*-liste** (ou ***p*-uplet**) d'éléments de E est un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p.
- Un ***p*-arrangement** de E est une p-liste de E formée d'éléments distincts.
- Si E est fini, une **permutation** de E est une bijection de E dans E.

Rem : différence entre liste et arrangement

Dans une liste, on autorise les éléments à se répéter, contrairement aux arrangements qui sont sans répétition.

Prop. : nombre de p-listes, de p-arrangements, de permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$.

- nombre de p-listes de E : n^p
- nombre de p-arrangements de E : $A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- nombre de permutations de E : $n!$

Prop. : nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Def. : p-combinaison, coefficient binomial

Soit E un ensemble, $p \in \mathbb{N}$.

- Une ***p*-combinaison** de E est une partie de E à p éléments.
- On suppose que E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons de E. Ce nombre est un **coefficient binomial**, prononcé « p parmi n ».

Rem : différence entre arrangements et combinaisons

Dans un p-arrangement, l'ordre a une importance, contrairement aux p-combinaisons où l'ordre n'est pas pris en compte.

Prop. : nombre de p-combinaisons

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si} \quad p \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad p > n \end{cases}$$