12.3 Applications linéaires

Fiche de cours

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Def. : application linéaire, endomorphisme

- Soit $f : E \to F$. f est une **application linéaire** si $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,
$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$
$\mathcal{L}(E,F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F.
- Un **endomorphisme** est une application linéaire de E dans E.
$\mathcal{L}(E)$ désigne $\mathcal{L}(E,E)$.
- Une **forme linéaire** est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Ex. : applications linéaires courantes

- applications linéaires :
  - $\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^\top \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}))$
  - $\begin{pmatrix} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$
- endomorphismes :
  - $\mathrm{Id}_E : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E)$
  - pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ (**homothétie** de rapport λ)
- formes linéaires :
  - $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - pour $a \in \mathbb{K}$, $f_a : \begin{pmatrix} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(a) \end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.
  - pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Prop. : endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un s.e.v. de E stable par f (c'est-à-dire $u(F) \subset F$). Alors l'application u_F : $\begin{pmatrix} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{pmatrix}$ est un endomorphisme de F, appelé **endomorphisme induit** de f sur F.

Prop. : composition d'applications linéaires

Soit G un $\mathbb{K}$-e.v.

- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
- Les applications $f \mapsto f \circ g$ et $g \mapsto f \circ g$ sont linéaires. La composition est dite **bilinéaire**.

Prop. : structure de $\mathcal{L}(E,F)$

- $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un espace-vectoriel.
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, en général non commutatif (MP/MPI uniquement)

Prop. : identités remarquables dans $\mathcal{L}(E,F)$

Soient $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ deux endomorphismes qui commutent ($f \circ g = g \circ f$), $n \in \mathbb{N}$.

- **binôme de Newton** :
$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$$
- **identité de Bernoulli** :
$$f^n - g^n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k} \right) \circ (f-g)$$

interdit si f et g ne commutent pas !

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, f désigne une application linéaire de E dans F.

Prop. : image directe et image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire

- Soit E' un s.e.v. de E. Alors $f(E')$ est un s.e.v. de F.
- Soit F' un s.e.v. de F. Alors $f^{-1}(F')$ est un s.e.v. de E.

Def. : noyau d'une application linéaire

Le **noyau** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, désigne $f^{-1}(\{0_E\})$: pour tout $x \in E$,
$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F.$$

Prop. : propriétés du noyau

- $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E.
- f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Def. : image d'une application linéaire

L'**image** de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, désigne $f(E)$: pour tout $y \in F$,
$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists\, x \in E,\ y = f(x)$$

Prop. : propriétés de l'image

- $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de F.
- f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Prop. : lien entre les propriétés de f et l'image d'une base

- Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. On note $f(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i\in I}$.
  - f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre.
  - f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F.
  - f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F.
- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une fmaille génératrice de E. Alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left((f(x_i))_{i\in I}\right)$.

Prop. : noyau et image de l'endomorphisme induit

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un s.e.v. de E stable par f. Alors
$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(u_F) &= \mathrm{Ker}(u) \cap F \\ \mathrm{Im}(u_F) &= u(F) \end{cases}$$

Def. : isomorphisme

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est un **isomorphisme** de E sur F si f est bijective. Si de plus $F = E$, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Def. : groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est appelé **groupe inéaire** de E, noté $\mathrm{GL}(E)$.

Prop. : propriétés des isomorphismes

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ deux isomorphismes.

- $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ est un isomorphisme de E sur G.
- f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Rem : structure de $\mathrm{GL}(E)$ (MP/MPI uniquement)

$\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Prop. : équivalences des propriétés des isomorphismes en dimension finie

Si E et F sont de dimension finie, avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

Prop. : inversibilité en dimension finie

Si E et F sont de dimension finie, avec $\dim(E) = \dim(F)$, alors pour tout $f \in \mathcal{L}(E,F)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un isomorphisme de E sur F
(ii) f admet un inverse à gauche
(iii) f admet un inverse à droite

et dans ce cas, l'inverse à gauche et l'inverse à droite coïncident avec f^{-1}.

Def. : espaces isomorphes

E est **isomorphe** à F s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Prop. : caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie

Si E est de dimension finie, F est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Corollaire : isomorphisme classique

Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Prop. : caractérisation d'un application linéaire par l'image d'une base

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E, $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$, $f(e_i) = v_i$.

Corollaire : unicité d'applications linéaires

- Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.
- Une application linéaire qui s'annule sur une base est nulle.

Prop. : dimension de $\mathcal{L}(E,F)$

Si E et F sont de dimension finie, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et
$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Prop. : unicité d'une application linéaire sur des s.e.v. supplémentaires

Supposons que $E = E_1 \oplus E_2$, avec E_1, E_2 des s.e.v. de E. Soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E_1,F) \times \mathcal{L}(E_2,F)$. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que
$$\begin{cases} f_{|E_1} = f_1 \\ f_{|E_2} = f_2 \end{cases}$$

Def. : projecteur

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur** si $p \circ p = p$.

Prop. : propriétés des projecteurs

Soit p un projecteur. Alors :

- $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E, p(x) = x\}$
- $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{Id}_E) = \{p(x) - x, x \in E\}$
- $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$
- pour $x \in E$, $x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} + \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}$

Dans ce qui suit, F et G sont deux s.e.v. supplémentaires de E.

Def. : projection

On définit la **projection sur F parallèlement à G** par :
$$p_F : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F \end{pmatrix}$$
où $(x_F, x_G) \in F \times G$ est l'unique décomposition de x sur $F \oplus G$.

Prop. : projections et projecteurs

- $p_F \in \mathcal{L}(E)$
- p_F est un projecteur
- $\mathrm{Im}(p_F) = F = \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = G$
- Tout projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Def. : symétrie

$s \in \mathcal{L}(E)$ est une **symétrie** si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Prop. : propriétés des symétries

Soit s une symétrie. Alors :

- $s \in \mathrm{GL}(E)$
- $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) = E$
- pour $x \in E$, $x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)}$

Def. : symétrie par rapport à un s.e.v.

On définit la **symétrie par rapport à F parallèlement à G** par :

$$s_F : \begin{pmatrix} E & \to & E \\ x = x_F + x_G & \mapsto & x_F - x_G \end{pmatrix}$$

où $(x_F, x_G) \in F \times G$ est l'unique décomposition de x sur $F \oplus G$.

Prop. : lien entre les notions de symétrie

- $s_F \in \mathrm{GL}(E)$
- $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_E$
- $\mathrm{Ker}\,(s_F - \mathrm{Id}_E) = F$ et $\mathrm{Ker}\,(s_F + \mathrm{Id}_E) = G$
- Si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Prop. : lien entre symétries et projections

Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, p et q les projecteurs associés à la décoposition $E = F \oplus G$. Alors

$$s = p - q = 2p - \mathrm{Id}_E$$

Dans ce qui suit, f désigne une application linéaire de E dans F.

Def. : rang

On dira que f est **de rang fini** si $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie. On appelera alors **rang** de f, noté $\mathrm{rg}\,(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Prop. : propriétés du rang

- Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini ; si on note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini.

On suppose que f est de rang fini.

- $\forall u \in \mathrm{GL}(E)$, $\mathrm{rg}\,(f \circ u) = \mathrm{rg}\,(f)$
- $\forall v \in \mathrm{GL}(F)$, $\mathrm{rg}\,(v \circ f) = \mathrm{rg}\,(f)$

On suppose que E et F sont de dimension finie.

- $\mathrm{rg}\,(f) \leqslant \min(\dim(E), \dim(F))$
- f est injective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim(E)$
- f est surjective $\iff \mathrm{rg}\,(f) = \dim(F)$

Prop. : forme géométrique du théorème du rang

Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f)$ dans E. Alors f induit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}\,(f)$.

Th. : théorème du rang

On suppose que E est de dimension finie. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

Cela ne signifie pas nécessairement $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$!

Dans ce qui suit, on suppose que E est de dimension finie n, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Def. : application coordonnée

Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'**application $i^{\text{ème}}$ coordonnée** est définie pour $x \in E$, par $\varphi_i(x) = x_i$.

φ_i est une forme linéaire sur E.

On prend à nouveau E de dimension quelconque.

Def. : hyperplan

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.

Def. : équations d'un hyperplan

Soit $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ un hyperplan de E, avec φ une forme linéaire non-nulle. L'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée **équation de l'hyperplan H**.

Notons $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ tels que $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$. Alors $x \in H$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. Cette équation est appelée **équation cartésienne de H dans la base $\mathcal{B}$**.

Prop. : supplémentaires d'un hyperplan

Soit H un hyperplan de E. Alors pour tout $u \notin H$, $\mathbb{R}u$ est une droite vectorielle supplémentaire de H.

Prop. : hyperplans en dimension finie

On suppose que E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un s.e.v. de E. H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

Prop. : comparaison des équations d'un hyperplan

Soit $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{K}))^2$. $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi_1 = \lambda \varphi_2$.

Prop. : intersection d'hyperplans

On suppose E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in [\![1, n]\!]$.

1. Si $H_1, \dots, H_r$ sont r hyperplans, alors $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} H_i\right) \geqslant n - r$.
2. Si F est un s.e.v. de E de dimension $n - r$, alors il existe r hyperplans $H_1, \dots, H_r$ tels que $F = \bigcap_{i=1}^{r} H_i$.

Def. : équation linéaire

Une **équation linéaire** est une équation de la forme $f(x) = b$, avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $b \in F$ le **second membre**, $x \in E$ l'**inconnue**. L'**équation homogène associée** est $f(x) = 0_F$.

Prop. : solutions d'une équation linéaire

Soit $f(x) = b$ une équation linéaire.

1. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est $\mathrm{Ker}\,(f)$.
2. L'ensemble des solutions est non vide si et seulement si $b \in \mathrm{Im}\,(f)$, et dans ce cas c'est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}\,(f)$. Si x_0 est une solution particulière, l'ensemble des solutions est de la forme $x_0 + \mathrm{Ker}\,(f)$.