12.2 Espaces de dimension finie

Fiche de cours

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def. : espace vectoriel de dimension finie

Un espace vectoriel est dit **de dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, il est dit **de dimension infinie**.

Ex. : espaces usuels de dimension finie ou infinie

- $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.
- $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v. **de dimension finie** non réduit à $\{0_E\}$.

Th. : théorème de la base extraite

De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Corollaire : existence de bases en dimension finie

E admet une base finie.

Prop. : lemme d'échange de Steinitz

Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E à l'aide d'éléments de $\mathcal{G}$.

Th. : théorème de la base incomplète

Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Prop. : majoration du cardinal des familles libres

Notons n le cardinal d'une base finie de E. Alors toute famille constituée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée. Autrement dit, toute famille libre contient au plus n vecteurs.

Corollaire : cardinal d'une base

Dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension fnie, toutes les bases ont même cardinal.

Def. : dimension d'un $\mathbb{K}$-e.v.

La **dimension** de E, notée $\dim(E)$, est le cardinal commun à chacune de ses bases. On notera par convention $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Def. : espaces de dimension 1 ou 2

Si $\dim(E) = 1$, E est appelé **droite vectorielle**. Si $\dim(E) = 2$, E est appelé **plan vectoriel**.

Ex. : droite et plan vectoriels

Si $x \in E$, $x \neq 0_E$, $\text{Vect}(x)$ est une droite vectorielle. Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors $\text{Vect}(x, y)$ est un plan vectoriel.

Ex. : dimension des espaces vectoriels usuels

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.
- Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

Prop. : dimension d'un produit d'espaces vectoriels

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie, et

$$\dim(E \times F) = \dim(E) \times \dim(F)$$

On note $n = \dim(E)$.

Prop. : cardinal des familles libres et génératrices

Alors

- Toute famille libre de E admet au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E admet au moins n éléments.

Prop. : famille de cardinal égal à la dimension de E

Notons $n = \dim(E)$. Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors il est équivalent de dire :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E ;
(ii) $\mathcal{F}$ est libre ;
(iii) $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

Prop. : dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit F un s.e.v. de E. Alors :

- F est de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Def. : rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Le **rang** de $(x_1, \dots, x_p)$ est défini par :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p))$$

Prop. : propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.

- $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant \min(n, p)$
- $(x_1, \dots, x_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$.
- $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E si et seulement si $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = n$.

Dans les deux propriétés suivantes, F et G désignent deux s.e.v. de dimension finie d'un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.

Prop. : formule de Grassmann

$F+G$ et $F\cap G$ sont de dimension finie et
$$\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$$
En particulier, $\dim(F+G)\leqslant\dim(F)+\dim(G)$.

Prop. : caractérisation d'une somme directe en dimension finie

Notons $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) une base de F (resp. de G). Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) F et G sont en somme directe ;

(ii) la base obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de $F+G$;

(iii) $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)$.

Prop. : caratérisation des s.e.v. supplémentaires en dimension finie

Soient F et G deux s.e.v. de E.

- Notons $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_G$) une base de F (resp. de G). Alors $E=F\oplus G$ si et seulement si la base obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ est une base de E. Cette base est alors dite **adaptée** à la décomposition en somme directe $E=F\oplus G$.
- Il est équivalent de dire :

(i) $E=F\oplus G$

(ii) $\begin{cases} E=F+G \\ \dim(E)=\dim(F)+\dim(G) \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} F\cap G=\{0_E\} \\ \dim(E)=\dim(F)+\dim(G) \end{cases}$

Prop. : existence de supplémentaires en dimension finie

Soit F un s.e.v. de E. Alors F admet un supplémentaire dans E. De plus, tous les supplémentaires de F dans E ont pour dimension $\dim(E)-\dim(F)$.

Rem : structure affine d'un espace vectoriel

Les éléments d'un espace vectoriel peuvent être vus comme des vecteurs, ou comme des **points**. À tout couple de points $(A,B)\in E^2$, on associe le vecteur noté $\overrightarrow{AB}$, défini par $\overrightarrow{AB}=B-A$. Réciproquement, étant donné un point A et un vecteur $u\in E$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB}=u$, appelé **translaté** de A.

Def. : translation

Soit $a\in E$. La **translation de vecteur a** est l'application $\tau_a : E\to E$ telle que pour un point M de E, $\tau_a(M)=M+a$.

Def. : sous-espace affine

Soit F un s.e.v. de E, $a\in E$. Un **sous-espace affine** de E est une partie $\mathcal{F}$ de la forme $\tau_A(F)$, où A est un point de E et F est un s.e.v. de E : $\mathcal{F}=\tau_A(F)=A+F=\{A+x, x\in F\}$.

On considère $\mathcal{F}=A+F$ un sous-espace affine de E, avec A un point de E et F un s.e.v. de E.

Prop. : unicité du s.e.v. sous-jacent à un sous-espace affine

Le s.e.v. F est unique : s'il existe B un point de E et G un s.e.v. de E tel que $\mathcal{F}=B+G$, alors $F=G$.

Def. : direction d'un sous-espace affine

Le s.e.v. F est appelé **direction** de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ est le **sous-espace affine de direction F passant par A**.

Def. : hyperplan affine

Un **hyperplan affine** de E est un sous-espace affine dont la direction est un hyperplan de E.

Ex. : sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$

Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont :

- les singletons $\{A\}$, pour A un point de E, de dimension 0 ; leur direction est $\{0_E\}$;
- les **droites affines**, de dimension 1 ; elles sont de la forme $A+\mathbb{R}u$, avec A un point de E et u un vecteur de E non nul ;
- le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier, de dimension 2.

Ex. : sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont :

- les singletons $\{A\}$, pour A un point de E, de dimension 0 ; leur direction est $\{0_E\}$;
- les **droites affines**, de dimension 1 ; elles sont de la forme $A+\mathbb{R}u$, avec A un point de E et u un vecteur de E non nul ;
- les **plans affines**, de dimension 2 ; ils sont de la forme $A+\mathbb{R}u+\mathbb{R}v$, avec A un point de E et (u,v) deux vecteurs non nuls non colinéaires de E ;
- l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, de dimension 3.

Prop. : intersection de sous-espaces affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G. Alors $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de E de direction $F\cap G$.