12.1 Espaces vectoriels

Fiche de cours

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def. : espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne $+$, et d'une loi externe $\cdot$: $\begin{pmatrix} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda y \end{pmatrix}$. $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** si :

(i) $(E, +)$ est un groupe abélien, d'élément neutre 0_E appelé **vecteur nul**

(ii) $\cdot$ est **distributive** sur $+$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2$,
$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$$

(iii) $+$ est **distributive** sur $\cdot$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E$,
$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

(iv) $\cdot$ et $\times$ sont **compatibles** : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E$,
$$\lambda(\mu x) = (\lambda y)x$$

(v) 1 est élément neutre pour $\cdot$: $\forall x \in E$,
$$1 \cdot x = x$$

E : ensemble des **vecteurs**
$\mathbb{K}$: ensemble des **scalaires**

Rem : notion de groupe abélien hors programme dans certaines filières

En dehors des filières MPSI/MP2I, on pourra remplacer la proposition « $(E, +)$ est un groupe abélien » par :

1. $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$
3. $+$ admet un élément neutre, noté 0_E : $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
4. tout élément de E admet un opposé, noté $-x$: $\forall x \in E, \exists -x \in E$, $x + (-x) = -x + x = 0_E$

Prop. : règles de calcul

1. **intégrité** : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,
$$\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$
2. **opposé** : $\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x$

Def. : espace vectoriel produit

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$-e.v. On définit sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ les opérations suivantes :

- $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in E^2$,
$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E$,
$$\lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Muni de ces opérations, $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., appelé **espace vectoriel produit de $E_1, \dots, E_n$**. Son vecteur nul est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Ex. : espaces vectoriels de référence

Les ensembles $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou encore $\mathbb{K}[X]$, munis des lois usuelles, sont des $\mathbb{K}$-e.v.
Si Ω est un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$-e.v. E^{Ω}, muni des lois induites sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$-e.v.

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-e.v.

Def. : combinaison linéaire

Soit $p \in \mathbb{N}$, I un ensemble non vide, $x \in E$.

- Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. x est **combinaison linéaire de** $(bmx_1, \dots, \boldsymbol{x_n})$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$.
- Une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est **presque nulle** si tous ses éléments, sauf un nombre fini, sont nuls. Notation : $\mathbb{K}^{(I)}$.
- Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. x est **combinaison linéaire de** $(\boldsymbol{x_i})_{\boldsymbol{i \in I}}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Def. : sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$. F est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de E si :

(i) $F \neq \emptyset$
(ii) F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$
(iii) F est stable par $\cdot$: $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\lambda x \in F$

Prop. : propriétés des sous-espaces vectoriels

1. Soit F un s.e.v. de E. Muni des lois induites, F est un $\mathbb{K}$-e.v.
2. F est un s.e.v. de E si et seulement si :
   (i) $0_E \in F$
   (ii) $\forall (x, y) \in F^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$
3. Soit F un s.e.v. de E. F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n$, $\forall (\lambda_1 \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x_i \in F$.
4. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v. d'un e.v. E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E.

Ex. : sous-espaces vectoriels usuels

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$.
2. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_{n,1}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^p$, est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p$.

Def. : sous-espace vectoriel engendré

Soit $A \subset E$. Le **sous-espace vectoriel engendré par** $\boldsymbol{A}$, noté $\mathrm{Vect}\,(A)$, est l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A :

$$\mathrm{Vect}\,(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ A \subset F}} F$$

Prop. : s.e.v. engendrés par une partie quelconque de E

Soit $A \subset E, B \subset E$.

1. $\text{Vect}(A)$ est le plus petit s.e.v. contenant A, au sens de l'inclusion : $A \subset \text{Vect}(A)$ et si F est un s.e.v. de E avec $A \subset F$, alors $\text{Vect}(A) \subset F$.
2. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. A est un s.e.v. de E si et seulement si $A = \text{Vect}(A)$.
4. $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k,\ p \in \mathbb{N},\ (x_1, \dots, x_p) \in A^p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

Prop. : s.e.v. engendrés par une famille finie de E

Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}^*$.

1. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots e_n)$
2. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i + \lambda e_j, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$
3. $\text{Vect}(e_1, \dots, \mu e_i, \dots e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots e_n)$
4. e_n est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$ si et seulement si $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Def. : famille libre

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille libre** si $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_{i_k} e_k = 0_E \Rightarrow (\forall k \in [\![1, p]\!],\ \lambda_k = 0) \right)$$

Dans le cas contraire, $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille liée**.

Prop. : propriétés des familles libres/liées

- **unicité des combinaisons linéaires** : soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre, $((\lambda_1 \dots, \lambda_p), (\mu_1, \dots, \mu_p)) \in (\mathbb{K}^p)^2$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$. Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$ (identification des coefficients)
- Une famille contenant 0_E est liée.
- Une famille constituée d'un unique vecteur non nul est libre.
- Une famille contenant deux vecteurs égaux est liée.
- Une famille est liée si et seulement si un vecteur est combinaison linéaire des autres.
- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, et $x \in E$. Alors $(e_1, \dots, e_n, x)$ est liée si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Prop. : famille libre de polynômes

Une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Def. : famille génératrice

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **génératrice** de E si $E = \text{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right)$. Autrement dit, tout vecteur de E est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Prop. : propriétés des familles génératrices

- Soient $\mathcal{F}$ une famille et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. $\mathcal{F}$ est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E.

Def. : base

Une base de E est une famille libre et génératrice de E.

Ex. : bases canoniques

- Dans $\mathbb{K}^n$, la famille de vecteurs $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définie, pour $i \in [\![1,n]\!]$, par
$$e_i = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n} = \left(0,\dots,0,\underbrace{1}_{i^{\text{e}}pos.},0,\dots,0\right),$$
forme une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille de matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définie, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, par $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant p}}$, forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}[X]$**.
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$**.

Prop. : propriétés des bases

- Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $(e_i)_{i\in I}$.

Def. : coordonnées

Soit $(e_1,\dots e_n)$ une base finie de E, $x \in E$. Les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{C}$ sont les uniques scalaires $(\lambda_1\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Dans ce qui suit, F et G sont deux s.e.v. de E.

Def. : somme de deux sous-espaces vectoriels

La **somme** de F et G, notée $F+G$, est l'ensemble défini par :
$$F+G = \{x+y,\ (x,y) \in F\times G\}$$

Prop. : propriétés de la somme de deux s.e.v.

- $F+G$ est un s.e.v. de E.
- $F+G = \text{Vect}\,(F\cup G)$
- Si H est un s.e.v. ; de E tel que $F\subset H$ et $G\subset H$, alors $F+G\subset H$.
- Soient X et Y deux parties de E. Si $F = \text{Vect}\,(X)$ et $G = \text{Vect}\,(Y)$, alors $F+G = \text{Vect}\,(X\cup Y)$.

Def. : somme directe

La sommme $F+G$ est **directe** si pour tout $z \in F+G$, il existe un unique couple $(x,y) \in F\times G$ tel que $z = x+y$. On note alors $F\oplus G$.

Prop. : caractérisation des sommes directes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G$ est directe.
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $\forall (x, y) \in F \times G, (x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E)$

Def. : sous-espaces vectoriels supplémentaires

F et G sont dits supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G$$

Prop. : caractérisation des s.e.v. supplémentaires

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $E = F \oplus G$
- $\begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$
- $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$

Prop. : s.e.v. supplémentaires, familles libres et génératrices, bases

Soit $\mathcal{F}$(resp. $\mathcal{G}$) une famille de F (resp. G), $\mathcal{H}$ la famille obtenue par concaténation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

1. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles libres et si $F \oplus G$ est directe, alors $\mathcal{H}$ est une famille libre.
2. Si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est une famille génératrice de F (resp. G), et si $E = F + G$, alors $\mathcal{H}$ est génératrice de E.
3. Si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est une base de F (resp. de G) et si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{H}$ est une base de E, dite **adaptée à la somme directe $\boldsymbol{E = F \oplus G}$**.