

MATHÉMATIQUES

Maths sup – MPSI PCSI

COURS, MÉTHODES ET EXERCICES

12.1 Espaces vectoriels

Fiche de cours

Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Def. : espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi de composition interne $+$, et d'une loi externe $\cdot$:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, y) & \mapsto & \lambda y \end{pmatrix}. (E, +, \cdot) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-espace vectoriel si :}$$

(i) $(E, +)$ est un groupe abélien, d'élément neutre 0_E appelé **vecteur nul**

(ii) $\cdot$ est **distributive** sur $+$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2$,

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda x + \lambda y$$

(iii) $+$ est **distributive** sur $\cdot$: $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E$,

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

(iv) $\cdot$ et $\times$ sont **compatibles** : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E$,

$$\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$$

(v) 1 est élément neutre pour $\cdot$: $\forall x \in E$,

$$1 \cdot x = x$$

E : ensemble des **vecteurs**

$\mathbb{K}$: ensemble des **scalaires**

Rem : notion de groupe abélien hors programme dans certaines filières

En dehors des filières MPSI/MP2I, on pourra remplacer la proposition « $(E, +)$ est un groupe abélien » par :

1. $+$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$
2. $+$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$
3. $+$ admet un élément neutre, noté 0_E : $\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$
4. tout élément de E admet un opposé, noté $-x$: $\forall x \in E, \exists -x \in E, x + (-x) = -x + x = 0_E$

Prop. : règles de calcul

1. **intégrité** : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$,

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$
2. **opposé** : $\forall x \in E, (-1) \cdot x = -x$

Def. : espace vectoriel produit

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$ -e.v. On définit sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$ les opérations suivantes :

- $\forall ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in E^2$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E$,

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Muni de ces opérations, $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -e.v., appelé **espace vectoriel produit de $E_1, \dots, E_n$** . Son vecteur nul est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Ex. : espaces vectoriels de référence

Les ensembles $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou encore $\mathbb{K}[X]$, munis des lois usuelles, sont des $\mathbb{K}$ -e.v.

Si Ω est un ensemble non vide et E un $\mathbb{K}$ -e.v. E^{Ω} , muni des lois induites sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$ -e.v.

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$ -e.v.

Def. : combinaison linéaire

Soit $p \in \mathbb{N}$, I un ensemble non vide, $x \in E$.

- Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. x est **combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$** s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i.$$
- Une famille $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est **presque nulle** si tous ses éléments, sauf un nombre fini, sont nuls. Notation : $\mathbb{K}^{(I)}$.
- Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. x est **combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$** s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.

Def. : sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$. F est un **sous-espace vectoriel** (s.e.v.) de E si :

- $F \neq \emptyset$
- F est stable par $+$: $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$
- F est stable par $\cdot$: $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F, \lambda x \in F$

Prop. : propriétés des sous-espaces vectoriels

1. Soit F un s.e.v. de E . Muni des lois induites, F est un $\mathbb{K}$ -e.v.
2. F est un s.e.v. de E si et seulement si :
 - $0_E \in F$
 - $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$
3. Soit F un s.e.v. de E . F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n$,
 $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in F$.
4. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v. d'un e.v. E . Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E .

Ex. : sous-espaces vectoriels usuels

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$.
2. L'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0_{n,1}$, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^p$, est un s.e.v. de $\mathbb{K}^p$.

Def. : sous-espace vectoriel engendré

Soit $A \subset E$. Le **sous-espace vectoriel engendré par A** , noté $\text{Vect}(A)$, est l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ s.e.v. de } E \\ A \subset F}} F$$

Prop. : s.e.v. engendrés par une partie quelconque de E

Soit $A \subset E, B \subset E$.

1. $\text{Vect}(A)$ est le plus petit s.e.v. contenant A , au sens de l'inclusion : $A \subset \text{Vect}(A)$ et si F est un s.e.v. de E avec $A \subset F$, alors $\text{Vect}(A) \subset F$.
2. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
3. A est un s.e.v. de E si et seulement si $A = \text{Vect}(A)$.
4. $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k, p \in \mathbb{N}, (x_1, \dots, x_p) \in A^p, (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

Prop. : s.e.v. engendrés par une famille finie de E

Soit $(e_1, \dots, e_n) \in E, i \neq j, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}^*$.

1. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_n)$
2. $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i + \lambda e_j, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$
3. $\text{Vect}(e_1, \dots, \mu e_i, \dots, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$
4. e_n est combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_{n-1}$ si et seulement si $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Def. : famille libre

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille libre** si $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$,

$$\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k e_k = 0_E \Rightarrow (\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_k = 0) \right)$$

Dans le cas contraire, $(x_i)_{i \in I}$ est une **famille liée**.

Prop. : propriétés des familles libres/liées

- **unicité des combinaisons linéaires** : soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre, $((\lambda_1, \dots, \lambda_p), (\mu_1, \dots, \mu_p)) \in (\mathbb{K}^p)^2$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^p \mu_i e_i$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$ (identification des coefficients)
- Une famille contenant 0_E est liée.
- Une famille constituée d'un unique vecteur non nul est libre.
- Une famille contenant deux vecteurs égaux est liée.
- Une famille est liée si et seulement si un vecteur est combinaison linéaire des autres.
- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E , et $x \in E$. Alors $(e_1, \dots, e_n, x)$ est liée si et seulement si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Prop. : famille libre de polynômes

Une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre.

Def. : famille génératrice

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E . On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **génératrice** de E si $E = \text{Vect}((x_i)_{i \in I})$. Autrement dit, tout vecteur de E est combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Prop. : propriétés des familles génératrices

- Soient $\mathcal{F}$ une famille et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E . $\mathcal{F}$ est génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{G}$ est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est génératrice de E .

Def. : base

Une base de E est une famille libre et génératrice de E .

Ex. : bases canoniques

- Dans $\mathbb{K}^n$, la famille de vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ définie, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par

$$e_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n} = \left(0, \dots, 0, \underset{i^{e_{pos.}}}{1}, 0, \dots, 0 \right),$$
 forme une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}^n$** .
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille de matrices $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, par $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq p}}$, forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$** .
- Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}[X]$** .
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$** .

Prop. : propriétés des bases

- Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est une base si et seulement si tout vecteur de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $(e_i)_{i \in I}$.

Def. : coordonnées

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base finie de E , $x \in E$. Les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{C}$ sont les uniques scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Dans ce qui suit, F et G sont deux s.e.v. de E .

Def. : somme de deux sous-espaces vectoriels

La **somme** de F et G , notée $F + G$, est l'ensemble défini par :

$$F + G = \{x + y, (x, y) \in F \times G\}$$

Prop. : propriétés de la somme de deux s.e.v.

- $F + G$ est un s.e.v. de E .
- $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$
- Si H est un s.e.v. de E tel que $F \subset H$ et $G \subset H$, alors $F + G \subset H$.
- Soient X et Y deux parties de E . Si $F = \text{Vect}(X)$ et $G = \text{Vect}(Y)$, alors $F + G = \text{Vect}(X \cup Y)$.

Def. : somme directe

La somme $F + G$ est **directe** si pour tout $z \in F + G$, il existe un unique couple $(x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$. On note alors $F \oplus G$.

Prop. : caractérisation des sommes directes

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $F \oplus G$ est directe.
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $\forall (x, y) \in F \times G, (x + y = 0_E \Rightarrow x = y = 0_E)$

Def. : sous-espaces vectoriels supplémentaires

F et G sont dits supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G$$

Prop. : caractérisation des s.e.v. supplémentaires

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $E = F \oplus G$
- $\begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$
- $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$

Prop. : s.e.v. supplémentaires, familles libres et génératrices, bases

Soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) une famille de F (resp. G), $\mathcal{H}$ la famille obtenue par concaténation de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

1. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles libres et si $F \oplus G$ est directe, alors $\mathcal{H}$ est une famille libre.
2. Si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est une famille génératrice de F (resp. G), et si $E = F + G$, alors $\mathcal{H}$ est génératrice de E .
3. Si $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) est une base de F (resp. de G) et si $E = F \oplus G$, alors $\mathcal{H}$ est une base de E , dite **adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$** .

Méthodes

Méthode : montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Pour montrer qu'un ensemble donné est un $\mathbb{K}$ -e.v., deux cas de figure peuvent se présenter :

- il est possible de montrer que cet ensemble est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. plus large ; alors, en tant que s.e.v., ce sera un $\mathbb{K}$ -e.v. muni des lois induites.

Exemple

Pour montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales de taille n est un $\mathbb{K}$ -e.v., on montre que c'est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- il n'est pas possible d'inclure cet ensemble dans un $\mathbb{K}$ -e.v. plus large ; on doit alors revenir à la définition d'un $\mathbb{K}$ -e.v. et effectuer toutes les vérifications nécessaires. Ce cas de figure se produit de façon très rare.

Méthode : montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Pour montrer qu'un ensemble F est un s.e.v., il est possible de passer par la définition et montrer séparément le caractère non-vide, la stabilité par $+$ et par $\cdot$. Mais il est en général plus efficace d'utiliser une caractérisation ne faisant intervenir que deux étapes :

1. montrer que $0_E \in F$
2. montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $(x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$

Cette méthode est plus rapide et plus efficace que la précédente, et doit donc être systématiquement privilégiée.

Dans certains cas, on dispose de propriétés du cours indiquant qu'un ensemble est un s.e.v. : sous-espace vectoriel engendré par une famille ou une partie de E , somme de s.e.v., et, plus tard, noyau ou image d'une application linéaire¹. Dans ces cas-là, il est préférable de s'appuyer sur ces propriétés qui fournissent immédiatement le caractère de s.e.v., plutôt que de démontrer la caractérisation ci-dessus.

1. voir chapitre 13.3

Méthode : écrire un s.e.v. sous forme paramétrique

Soit F un s.e.v. défini par un système d'équations linéaires. Pour écrire F sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré :

1. on échelonne le système, de façon à distinguer les inconnues et les paramètres
2. on substitue dans l'expression de F les inconnues par les paramètres. Les inconnues ne doivent alors plus apparaître.
3. on factorise par les paramètres pour obtenir les vecteurs qui engendrent F .

Ex. : forme paramétrique d'un s.e.v.

On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Soit $(x, y, z) \in F$. Dans l'équation $x + y + z = 0$, on peut choisir comme paramètres y et z , de sorte que l'inconnue x s'exprime par $x = -y - z$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-y - z, y, z) \\ &= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)\end{aligned}$$

de sorte que $F = \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.

Méthode : montrer qu'une famille est libre

La plupart du temps, pour montrer qu'une famille est libre, on se ramène à la définition. On prend donc des scalaires donnant une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille, et on montre que ces scalaires sont tous nuls. Si la famille est infinie, ou s'il s'agit d'une partie infinie de E , on veillera à prendre d'office un nombre fini de scalaires pour travailler sur la combinaison linéaire nulle.

Pour montrer que les scalaires sont nuls, il existe de nombreuses techniques qui dépendent fondamentalement de la nature des vecteurs en question. Dans certains cas, une récurrence sur les scalaires sera possible pour montrer de proche en proche leur nullité. Dans le cas de fonctions, on pourra effectuer des passages à la limite ou des évaluations en certains points particuliers.

Ex. : liberté d'une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Considérons les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrons que (u, v) est libre. Supposons, pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, que $\lambda u + \mu v = 0$. On obtient le système d'équations
$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \\ 2\mu = 0 \end{cases} \quad \text{d'où on déduit } \lambda = \mu = 0. \text{ D'où la liberté de la famille } (u, v).$$

Ex. : liberté d'une famille de fonctions exponentielles

Considérons $(f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$, une famille de fonctions vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour montrer qu'elle est libre, donnons-nous $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ distincts deux à deux, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$. Quitte à renuméroter les α_i , on peut les supposer triés par ordre croissant : $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$. En divisant l'égalité par $e^{\alpha_1 x}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} = 0$$

Puisque pour $i \geq 2$, $\alpha_i - \alpha_1 > 0$, $e^{(\alpha_i - \alpha_1)x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$. En passant à la limite quand $x \rightarrow -\infty$, on obtient $\lambda_1 = 0$.

On se ramène donc à $\sum_{i=2}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Ceci permet d'enclencher un raisonnement par récurrence pour montrer, de proche en proche, la nullité des scalaires λ_i .

Rem : raisonnement par l'absurde

Il est possible de résoudre cet exercice par l'absurde. On suppose que les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont non tous nuls, et on considère l'ensemble $A = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$. Cet ensemble d'entiers non vide admet un plus petit élément $i_{\min}$, de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$. En appliquant le même argument que dans le raisonnement ci-dessus, on obtiendrait $\lambda_{i_{\min}} = 0$, ce qui contredirait le fait que $i_{\min} \in A$. Donc les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous nuls.

Méthode : déterminer une famille génératrice d'un s.e.v.

Dans de nombreux cas, notamment dans des espaces vectoriels usuels comme $\mathbb{K}^n$ pour de petites valeurs de n , déterminer une famille génératrice passe par la forme paramétrique du s.e.v. (cf. plus haut). Il est également possible de vérifier qu'une famille est génératrice d'un s.e.v. F en déterminant explicitement une décomposition des vecteurs de F comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille en question.

Ex. : famille génératrice de polynômes

Montrons que $(1, X, X(X-1))$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, on se donne un polynôme de $\mathbb{R}^2$, noté $P = aX^2 + bX + c$, que l'on essaie d'écrire comme combinaison linéaire de $1, X, X(X-1)$. On suppose donc l'existence de scalaires α, β, γ tels que :

$$\begin{aligned} P &= aX^2 + bX + c \\ &= \alpha + \beta X + \gamma X(X-1) \\ &= \alpha + (\beta - \gamma)X + \gamma^2 \end{aligned}$$

On identifie donc $\alpha = c$, $\gamma = a$ et $\beta - \gamma = b$ soit $\beta = a + b$. Ainsi $P = c + (a + b)X + aX(X-1)$. On a donc $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Vect}((1, X, X(X-1)))$. Comme la réciproque est immédiate, on a bien montré que $(1, X, X(X-1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthode : montrer qu'une somme de s.e.v. est directe, en pratique

Pour montrer qu'une somme de deux s.e.v. F et G de E est directe, on pourra se référer à l'une des caractérisations énoncées ci-dessus : montrer $F \cap G = \{0_E\}$ ou bien que pour $(x, y) \in F \times G$, $x + y = 0_E \Rightarrow (x = 0_E \text{ et } y = 0_E)$. Parfois, on montre via une analyse-synthèse l'unicité de la décomposition en somme d'éléments de F et G .

Dans le cas de plusieurs s.e.v. $F_1, \dots, F_p$, le **seul critère** (du moins au programme) est la généralisation de la deuxième caractérisation ci-dessus : montrer que pour $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$, $\sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_E$.

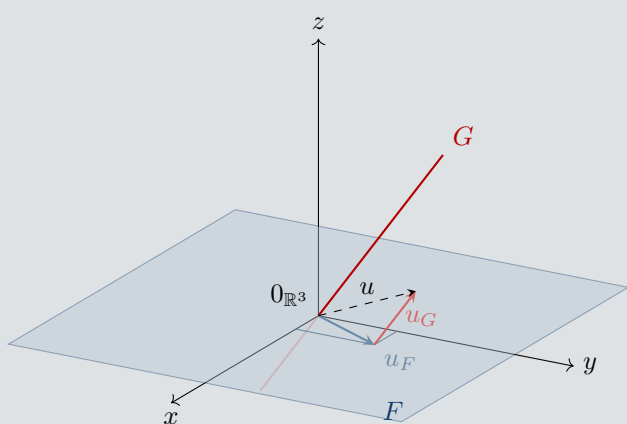
Le fait que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$ n'est pas suffisant pour que la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ soit directe.

C'est en revanche une condition nécessaire.

Ex. : condition de somme directe non suffisante

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons $F_1 = \text{Vect}(e_1)$, $F_2 = \text{Vect}(e_2)$, $F_3 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$. On a bien $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$, mais la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe, par exemple car $e_1 + e_2$ ne se décompose pas de façon unique dans $F_1 + F_2 + F_3$.

Rem : s.e.v. supplémentaires : illustration



Pour se représenter mentalement des s.e.v. supplémentaires, on pourra penser au schéma ci-contre : les sous-espaces F et G sont en somme directe, puisque leur intersection est réduite à $\{0_E\}$, et on a bien $F + G = \mathbb{R}^3$, dans la mesure où tout vecteur u peut se décomposer comme la somme d'un vecteur $u_F \in F$ et d'un vecteur $u_G \in G$.

Le point important est que cette représentation peut aider à réfléchir même dans des situations plus complexes et moins géométriques que $\mathbb{R}^3$: s.e.v. de fonctions, de suites, de polynômes, de $\mathbb{C}^n$, etc.

Exercices

1 Assimilation du cours

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels :

1. $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}$
2. $E = \{ y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y'' - 2y' + 2y = 0 \}$
3. $E = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée} \}$
4. $E = \{ P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) = 2 \}$
5. $E = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \}$

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées dans $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 0), (0, 1, 1))$
2. $\mathcal{F}_2 = ((0, -2, 1), (2, -1, -3), (1, 1, -2))$
3. $\mathcal{F}_3 = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (2, 1, 2))$

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$G = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = f(1) = 0 \}$$

$$H = \{ x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Montrer que G et H sont supplémentaires.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. On pose

$$F = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0 \}$$

$$G = \{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1} \}$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

2 Entraînement

Exercice 5

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \}$$

$$G = \{ (2a, -a, 0, a), a \in \mathbb{R} \}$$

1. Démontrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$.
3. En déduire que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E
- (ii) $F \subset G$ ou $G \subset F$

Exercice 7

Soient E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que F, G et H sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F + G) \cap H = \{0_E\}$.

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions 1-périodiques et G le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions de limite nulle en $+\infty$.

1. Démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2. F et G sont-ils supplémentaires ?

3 Approfondissement

Exercice 9

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On considère $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = e_k + y$. Déterminer à quelle condition la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.