Groupe Ipesup Optimal Sup-Spé

Concours Centrale-Supélec

Maths Spé – CPGE Concours 2026

Mathématiques 2 PSI 2026

Corrigé du sujet

Contenu

Après une présentation du sujet, on présente un corrigé détaillé pour les étudiants qui veulent travailler cette annale. Le corrigé est agrémenté de petits encadrés qui rappellent quels chapitres sont sollicités à chaque question.

Un index se trouve en fin de document afin de s'y repérer convenablement. En rouge, les thématiques de Spé et en orange, les thématiques de Sup.

Préambule

- Ce sujet traite de manière assez générale de la théorie des polynômes orthogonaux. Il montre comment, à partir de la définition en temps que dérivée, on peut aboutir à une relation entre les polynômes comme équation différentielle ou de récurrence. De plus, on démontre des propriétés standards de tels polynômes comme le nombre de racines ou une borne de celles-ci.
- Mathématiquement, **ce sujet est extrêmement calculatoire**. Aucune question n'est réellement difficile mais demande d'être à l'aise sur ses calculs et de se rappeler tout ce qui a été fait dans le sujet. Les principaux thèmes abordés sont l'étude des polynômes, les espaces préhilbertiens, l'intégrabilité, le calcul intégral, les équations différentielles et les séries entières. **Les thèmes abordés sont presque tous abordables en Mathématiques supérieures** (il suffit de considérer $\alpha, \beta \geq 0$ dans le sujet pour éviter les intégrales généralisées), mise à part la dernière partie qui traite des séries entières.
- La partie A demande de vérifier la convergence d'intégrales et de définir le produit scalaire avec lequel on travaillera dans la suite. Classique mais potentiellement laborieux dans la rédaction (surtout la Q2). La suite constitue à des calculs d'intégrales sans trop de difficultés.
- La partie B ne comporte qu'une seule question difficile sur la preuve de la formule de Vandermonde via les ensembles. Difficile si l'on ne connaît pas mais le sujet donne de bonnes indications afin que le candidat puisse trouver la réponse. La preuve est importante à connaître

car la méthode peut s'étendre pour de nombreuses autres formules faisant intervenir des coefficients binomiaux.

- La partie C étudie les propriétés classiques des polynômes orthogonaux. La section I découle facilement des définitions que l'on a donné des P_k. La relation de récurrence est assez astucieuse mais réalisable. Enfin, le calcul des racines est assez simple car très bien guidé dans le sujet. **Cette partie est un classique** à savoir absolument faire **sur les polynômes orthogonaux**.
- La partie D traite du cas particulier des polynômes de Jacobi. La réelle **difficulté** de cette partie est de **justifier convenablement les calculs** que l'on réalise et **ne pas se perdre dans les dérivations**. La Q25 est très mal rédigée **(fausse pour** $i = 0$**)** et ne permet pas de conclure convenablement pour la question suivante car il faut itérer à de nombreuses reprises cette formule. (On ne sait pas si la récurrence est attendue ou non.)
- La partie E traite ensuite du cas particulier des polynômes de Legendre. Il s'agit de reprendre toutes les questions précédentes et de les appliquer dans ce cas. **Il s'agit d'un exemple classique souvent traité** sans la généralisation par les polynômes de Jacobi. On détermine toutefois des propriétés plus précises comme l'équation différentielle ou la majoration des L_k mais qui ne sont pas aussi compliquées que les précédentes. Il s'agit encore d'une partie très calculatoire. Un détail pour Q39, on peut parvenir à calculer les normes de L_k en exploitant l'intégrale de Wallis ou des relations sur les dérivées mais on peut outre-passer la difficulté avec l'astuce utilisée dans la correction. La partie sur les séries entières n'a pas de lien avec le reste du sujet et est facile, pas sûr de comprendre son intérêt pédagogique dans le sujet.

1 Un produit scalaire

1. D'après le résultat sur les intégrales de Riemann, on a que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\delta} < +\infty \Longleftrightarrow \delta < 1.$$

Chap. :
- *Int.*

De plus, si $\delta < 1$, on a

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\delta} = \left[\frac{t^{-\delta+1}}{1-\delta}\right]_0^1 = \frac{1}{1-\delta}.$$

2. Si $a = 0$, l'intégrale est convergente pour tout $\delta \in \mathbb{R}$ et vaut 0. On suppose maintenant que $a \neq 0$. On réalise alors le changement de variable affine $s = 1 - \dfrac{t}{a}$. On en déduit alors par théorème de changment de variable que $\displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\delta}$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \frac{-a\,\mathrm{d}s}{(as)^\delta}$ converge, ce qui est vrai dès que $\delta < 1$.

Chap. :
- *Int.*

3. On remarque déjà que la fonction $g : t \in]-1,1[\mapsto (1-t)^\alpha(1+t)^\beta f(t)$ est continue. On a au voisinage de 1 que $|g(t)| = O\left(\dfrac{1}{(1-t)^{-\alpha}}\right)$ intégrable car $-\alpha < 1$ et au voisinage de -1 que $|g(t)| = O\left(\dfrac{1}{(1+t)^{-\beta}}\right)$ intégrable car $-\beta < 1$. On en déduit alors que g est intégrable au voisinage de 1 et -1 par théorème de comparaison pour les fonctions positives. On en déduit alors que g est intégrable sur $[-1,1]$ donc l'intégrale converge.

Chap. :
- *Int.*

4. Vérifions les différentes propriétés.
   - Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1,1]$. Donc $\langle P, Q\rangle$ est bien définie.
   - $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire car pour tout $t \in [-1,1]$, $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \mapsto P(t)Q(t)$ est bilinéaire et par linéarité de l'intégrale.
   - $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique car pour tout $t \in [-1,1]$, $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \mapsto P(t)Q(t)$ l'est.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a

   $$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P(t)^2 \geq 0$$

   par positivité de l'intégrale. De plus, supposons que $\langle P, P\rangle = 0$. Alors comme $t \mapsto (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P(t)^2$ est continue et positive sur $]-1,1[$, on en déduit que pour tout $t \in]-1,1[$, $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P(t)^2 = 0$. Or pour tout $t \in]-1,1[$, $(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} > 0$. On en déduit donc que $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $]-1,1[$. Ainsi P admet une infinité de racine et $P = 0$, *i.e.* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

   Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Chap. :
- *EPR*

1.1 Un premier exemple

5. La fonction $t \in]-1,1[\mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathbb{R}$ est continue et impaire. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge, elle vaut 0 par imparité.
6. On calcule directement

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

Chap. :
- *Primitive*

Chap. :
- *Primitive*

Ensuite, par le changement de variable $t = \sin(\theta)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle X, X\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{\sqrt{1-\sin(\theta)^2}}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|1\| = \sqrt{\pi}$ et $\|X\| = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

1.2 Un second exemple

7. Soient $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ non nécessairement distincts. On calcule directement

$$\begin{aligned}\left\langle X^i, X^j \right\rangle &= \int_{-1}^{1} t^i t^j \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{1-(-1)^{i+j+1}}{i+j+1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{i+j+1} & \text{si } i+j \text{ est pair} \end{cases}.\end{aligned}$$

Chap. :
- *Primitive*

8. On en déduit en particulier que

$$\left\| X^i \right\| = \sqrt{\frac{2}{2i+1}}.$$

2 Autour des coefficients binomiaux

9. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble à $m+p$ éléments. On écrit $\mathcal{F}$ sous la forme d'une union disjointe $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m \sqcup \mathcal{F}_p$ où $\mathcal{F}_m$ contient m éléments de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_p$ les p restants. On veut étudier l'ensemble des parties de $\mathcal{F}$ à k éléments noté $\mathcal{P}_k(\mathcal{F})$. On remarque que l'on a l'union disjointe

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{j=0}^{k} \mathcal{P}_j(\mathcal{F}_p) \times \mathcal{P}_{k_j}(\mathcal{F}_m),$$

ce qui signifie que pour choisir k éléments dans $\mathcal{F}$, il faut en prendre j éléments dans $\mathcal{F}_p$ et les $k-j$ restants dans $\mathcal{F}_m$. On en déduit alors en passant au cardinal la foremule de Vandermonde (car l'union est disjointe et le cardinal d'un produit est le produit des cardinaux).

Chap. :
- *Den.*

10. Soient k, n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Si $k = 0$, alors on a $B_k^n = 1 = \binom{n}{k}$. Sinon $k > 0$ et on a

$$B_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Chap. :
- *Den.*

3 Une famille de polynômes

11. Par hypothèse, $P_k \in \operatorname{Vect}\left(1, \ldots, X^k\right)$. On en déduit donc que $\deg(P_k) \leq k$. Supposons que $\deg(P_k) \leq k-1$, *i.e.* $P_k \in \operatorname{Vect}\left(1, \ldots, X^{k-1}\right)$. On en déduit alors que

$$\operatorname{Vect}\left(1, \ldots, X^k\right) = \operatorname{Vect}\left(P_0, \ldots, P_k\right) \subset \operatorname{Vect}\left(1, \ldots, X^{k-1}\right),$$

ce qui est absurde. On en déduit donc que $\deg(P_k) = k$.

Chap. :
- *E.V.*

12. Comme $\mathfrak{B}$ forme une base orthonormale, on a que

$$P_k \in \operatorname{Vect}\left(P_0, \ldots, P_{k-1}\right)^{\perp} = \operatorname{Vect}\left(1, \ldots, X^{k-1}\right)^{\perp}.$$

Chap. :
- *EPR*

13. Soit $Q \in \text{Vect}\left(1, \ldots, X^{k-1}\right)^\perp$ tel que $\deg(Q) = k$. En particulier, on a $Q \in \text{Vect}\left(1, \ldots, X^k\right) = \text{Vect}\,(P_0, \ldots, P_k)$. Il existe donc des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ tels que $Q = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j P_j$. En utilisant le fait que $\mathfrak{B}$ forme une base orthonormale et que $Q \in \text{Vect}\left(1, \ldots, X^{k-1}\right)^\perp$, on en déduit que pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$,
$$0 = \langle Q, P_j \rangle = \alpha_j.$$
D'où $Q = \alpha_k P_k$.

Chap. :
- EPR

3.1 Une relation entre P_{k-1}, P_k et P_{k+1}

14. On remarque que $\deg(P_{k+1}) = k+1 = \deg(XP_k)$. On note $\gamma_j \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P_j pour tout $j \in [\![0, n]\!]$. On pose alors $a_k = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}$. On a $\deg(P_{k+1} - a_k XP_k) \leq k+1$. Or, le coefficient de degré $k+1$ vaut $\gamma_{k+1} - a_k \gamma_k = 0$. On en déduit donc que $\deg(P_{k+1} - a_k XP_k) \leq k$.

Chap. :
- Pol

15. On garde les notations de la question précédente. On procède par analyse-synthèse. On suppose que $b_k, c_k \in \mathbb{R}$ existent. On remarque comme $\mathfrak{B}$ est orthonormale que,
$$0 = \langle P_{k+1}, P_{k-1} \rangle = \langle (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}, P_{k-1} \rangle = a_k \langle XP_k, P_{k-1} \rangle + c_k.$$
Ainsi,
$$c_k = -a_k \langle XP_k, P_{k-1} \rangle .$$
On a ensuite que
$$0 = \langle P_{k+1}, P_k \rangle = \langle (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}, P_k \rangle = a_k \langle XP_k, P_k \rangle + b_k.$$
On en déduit donc que
$$b_k = -\frac{\gamma_{k+1} \langle XP_k, P_k \rangle}{\gamma_k}.$$
On procède à la synthèse. On pose $Q_k = (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}$. D'après les calculs effectués, on a que
$$\langle Q_k, P_{k-1} \rangle = \langle Q_k, P_k \rangle = 0.$$
Soit $j \in [\![0, k-2]\!]$. On a
$$\langle Q_k, P_j \rangle = \langle P_k, (a_k X + b_k)P_j \rangle + c_k \langle P_{k-1}, P_j \rangle = 0,$$
car $\mathfrak{B}$ est une base orthonormale et que $P_k \in \text{Vect}\,(()1, \ldots, X^{k-1})^\perp$ et $\deg((a_k X + b_k)P_j) = j + 1 \leq k - 1$. On en déduit donc d'après la question 13) qu'il existe α_{k+1} tel que $Q_k = \alpha_{k+1} P_{k+1}$. Or d'après 14), les coefficients dominants de P_{k+1} et Q_k coincident. On en déduit donc que $P_{k+1} = Q_k = (a_k X + b_k)P_k + c_k P_{k-1}$ ce qui est le résultat souhaité. (La preuve montre également l'unicité de a_k, b_k, c_k.)

Chap. :
- Pol
- EPR

3.2 Racine des polynômes P_k

16. Comme un polynôme de degré n admet au plus n racines et quedeg$(P_k) = k$, on en déduit que P_k admet au plus k racines réelles donc $m \leq k$.

Chap. :
- Pol

17. On suppose que $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Par définition de $\mathcal{R}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ sans racines réelles dans $]-1, 1[$ tel que
$$P_k = \prod_{j=1}^{m} (X - x_j) Q_k.$$

Chap. :
- Pol
- Limites

On en déduit alors que

$$P_kS = \prod_{j=1}^{m}(X-x_j)^2 Q_k.$$

Or $x \in]-1,1[\mapsto Q_k(x)$ est continue et ne s'annule pas sur $]-1,1[$. On en déduit donc par le théorème des valeurs intermédiaires que cette fonction est de signe constant sur $]-1,1[$. Ainsi, $x \in]-1,1[\mapsto P_k(x)S(x)$ est également de signe constant sur $]-1,1[$. Si $\mathcal{R} = \emptyset$, on applique le même raisonnement mais avec $Q_k = P_k$ et $P_kS = P_k$.

18. Par l'absurde, on suppose que $\langle P_k, S\rangle = 0$. Autrement dit,

$$\int_{-1}^{1}(1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_k(t)S(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Chap. :
- *Pol*
- *Limites*

Or, $t \in]-1,1[\mapsto (1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_k(t)S(t)$ est de signe constant et est continue sur $]-1,1[$. On en déduit donc que pour tout $t \in]-1,1[$, $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta P_k(t)S(t) = 0$, *i.e.* $P_k(t)S(t) = 0$. Or $P_kS \in \mathbb{R}[X]$, on en déduit donc que $P_kS = 0$, absurde car $\deg(P_kS) = k+m \in \mathbb{N}$. Donc $\langle P_k, S\rangle \neq 0$.

19. On a $\deg(S) = m \leq k$. On suppose que $m < k$. On a alors que $S \in \mathrm{Vect}\left(1,\dots,X^{k-1}\right)$. Or, $P_k \in \mathrm{Vect}\left(1,\dots,X^{k-1}\right)^\perp$. On en déduit donc que $\langle P_k, S\rangle = 0$, absurde d'après la question précédente. On en déduit donc que $m = k$, *i.e.* toutes les racines de P_k sont réelles et dans $]-1,1[$.

Chap. :
- *EPR*

4 Polynômes de Jacobi

4.1 Définition

20. On calcule directement pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g_0(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$
$$g_1(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1},$$
$$g_1'(x) = -(\alpha+1)(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta+1} + (\beta+1)(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\beta,$$
$$J_0(x) = 1,$$
$$J_1(x) = \frac{-1}{2}\left(-(\alpha+1)(1+x)+(\beta+1)(1-x)\right) = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)x + \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Chap. :
- *Fonctions*

21. Soit $j \in \mathbb{R}$. On note $h_j : x \in]-1,1[\mapsto (1-x)^j$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$\forall x \in]-1,1[, h_j^{(p)}(x) = (-1)^p p! B_p^j (1-x)^{j-p}.$$

Chap. :
- *Der.*

Pour $p = 0$, on a directement le résultat car $(-1)^p p! B_p^j = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vérifié. On dérive alors $h_j^{(p)}$ sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$h_j^{(p+1)}(x) = (-1)^p p! B_p^j(-1)(j-p)(1-x)^{j-(p+1)} = (-1)^{p+1}(1-x)^{j-(p+1)} p! B_p^j (j-p).$$

Or,

$$p! B_p^j (j-p) = j(j-1)\cdots(j_p+1)(j-p) = (p+1)! B_{p+1}^j,$$

ce qui conclut l'hérédité. On obtient donc la propriété souhaitée par récurrence simple. De la même manière, si on note $r_j : x \in]-1,1[\mapsto (1+x)^j$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in]-1,1[, r_j^{(p)}(x) = p! B_p^j (1+x)^{j-p}.$$

22. D'après la règle de Leibniz, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} g_k^{(k)}(x) &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} h_{\alpha+k}^{(k-l)}(x) r_{\beta+k}^{(l)}(x) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-1)^{k-l}(k-l)! B_{k-l}^{\alpha+k}(1-x)^{\alpha+l} l! B_l^{\beta+k}(1+x)^{\beta+k-l} \\ &= (-1)^k k! \sum_{l=0}^{k} B_{k-l}^{\alpha+k} B_l^{\beta+k}(-1)^l (1-x)^{\alpha+l}(1+x)^{\beta+k-l}. \end{aligned}$$

Chap. :
- Der.

23. On en déduit donc avec la question précédente que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$J_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} B_{k-l}^{\alpha+k} B_l^{\beta+k} (x-1)^l (1+x)^{k-l}.$$

24. Dans la suite, on confondra J_k vu comme une fonction polynomiale ou un polynôme (déduit de l'expression de la question précédente). On commence par remarquer que $\deg(J_k) \leq k$. Pour $k=0$, on a $J_0 = 1$ et donc $\deg(J_0) = 0$. Pour $k=1$, on a $J_1 = \left(1 + \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) X + \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ et $\dfrac{\alpha+\beta}{2} > -1$. On a donc bien $\deg(J_1) = 1$. Pour $k \geq 2$, on utilise l'expression précédente. On remarque que le coefficient d'ordre k de J_k est par formule de Vandermonde

Chap. :
- Pol

$$\frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} B_{k-l}^{\alpha+k} B_l^{\beta+k} = \frac{1}{2^k} B_k^{\alpha+\beta+2k} = \frac{(\alpha+\beta+2k)\cdots(\alpha+\beta+k+1)}{2^k k!}.$$

Or $\alpha+\beta+k+1 > k-1 \geq 1 > 0$. On en déduit donc bien que ce terme est non-nul et donc que $\deg(J_k) = k$. De plus, le coefficient dominant de J_k vaut $\dfrac{1}{2^k} B_k^{\alpha+\beta+2k}$.

4.2 Orthogonalité des polynômes de Jacobi

25.

> L'énoncé est ici incorrect pour $i = 0$ (l'intégrale de droite n'est pas convergente). On suppose donc ici que $i \geq 1$.

Chap. :
- Int.

Pour la suite, on remarque également en appliquant la formule de Leibniz comme pour 22) que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g_k^{(k-1)}(x) = (k-1)!(-1)^{k-1} \sum_{l=0}^{k-1} B_{k-1-l}^{\alpha+k} B_l^{\beta+k} (-1)^l (1-x)^{\alpha+l+1}(1+x)^{\beta+1+k-1-l}.$$

On remarque que les fonctions $f_1 : x \mapsto x^i g_k^{(k)}(x)$ et $f_2 : x \mapsto x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x)$ sont continues sur $]-1,1[$. De plus, au voisinage de 1,

$$|f_1(x)| = O((1-x)^{\alpha}), |f_1(x)| = O((1-x)^{\alpha+1})$$

où les termes dans les O sont intégrables au voisinage de 1 car $\alpha > -1$. Ensuite, au voisinage de -1,

$$|f_1(x)| = O((1+x)^{\beta}), |f_1(x)| = O((1+x)^{\beta+1})$$

où les termes dans les O sont intégrables au voisinage de 1 car $\beta > -1$. On en déduit donc par théorème de comparaison pour les fonctions positives que f_1 et f_2 sont intégrables sur $]-1,1[$. On en déduit alors par théorème d'intégration par parties ($g_k \in \mathcal{C}^\infty$) que

$$\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^i g_k(k-1)(x)\right]_{-1}^{1} - i\int_{-1}^{1} x^{i-1} g_k^{(k-1)}(x),$$

où le crochet converge car les intégrales convergent. Or, avec l'expression calculée ci-dessus, comme pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$, on a $\alpha + l + 1 > 0$ et $\beta + 1 + k - 1 - l > 0$, on en déduit que $g_k^{(k-1)}(-1) = g_k^{(k-1)}(1) = 0$, ce qui donne l'égalité cherchée.

26. De la même manière que précédemment, on peut prouver pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$ que $g_k^{(l)}(-1) = g_k^{(l)}(1) = 0$. On peut donc procéder à de multiples intégrations par parties J_k étant $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit donc que

Chap. :
- *Primitive*

$$\begin{aligned}
\left\langle J_k, X^i\right\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta x^i J_k(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!}\int_{-1}^{1} x^i g_k^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!}(-1)^i i!\int_{-1}^{1} g_k^{(k-i)}(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{(-1)^{k-i} i!}{2^k k!}\left(g_k^{(k-i-1)}(1) - g_k^{(k-i-1)}(-1)\right) = 0
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $k - i \geq 1$ et le résultat annoncé au début de la question.

27. On rappelle d'après Q24 que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(J_k) = k$. Soient $0 \leq l < k \leq n$ avec l, k des entiers. On écrit $J_l = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j X^j$. On a alors par linéarité à droite du produit scalaire que

Chap. :
- *EPR*

$$\langle J_k, J_l\rangle = \sum_{j=0}^{l} \alpha_j \left\langle J_k, X^j\right\rangle = 0,$$

d'après la question précédente. On en déduit donc bien que $(J_0, \ldots, J_n)$ est orthogonale.

28. En reprenant la question précédente, on a que $\left(\frac{J_0}{\|J_0\|}, \ldots, \frac{J_n}{\|J_n\|}\right)$ qui forme une famille orthonormale. Or il s'agit d'une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$. On en déduit donc que la famille $\left(\frac{J_0}{\|J_0\|}, \ldots, \frac{J_n}{\|J_n\|}\right)$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Chap. :
- *EPR*

5 Le cas particulier $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

5.1 Premières propriétés des polynômes L_k

29. On calcule directement

Chap. :
- *Pol*

$$L_0 = 1,$$

$$L_1 = \frac{1}{2}[(X^2-1)]' = X,$$

$$L_2 = \frac{1}{8}[(X^2-1)^2]'' = \frac{1}{8}(X^4 - 2X^2 + 1)'' = \frac{1}{8}(12X^2 - 4) = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$$

$$L_3 = \frac{1}{48}[(X^2-1)^3]''' = \frac{1}{48}\left(X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1\right)''' = \frac{1}{48}\left(120X^3 - 72X\right) = \frac{1}{2}(5X^3 - 3X).$$

30. On note pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathcal{R}_k$ les racines du polynômes L_k. On a alors

$$\mathcal{R}_0 = \emptyset, \mathcal{R}_1 = \{0\}, \mathcal{R}_2 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \mathcal{R}_3 = \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}.$$

Chap. :
- *Pol*

On remarque donc que toutes les racines sont réelles et comprises dans $]-1,1[$, ce qui correspond bien à la réponse trouvée en Q19.

31. Le polynôme $(X^2-1)^k$ est de degré $2k$. On en déduit donc que $[(X^2-1)^k]^{(k)}$ est de degré $2k-k=k$. Donc L_k est de degré k et son coefficient dominant vaut

$$\frac{1}{2^k k!}(2k)\cdots(2k-k+1) = \frac{(2k)!}{2^k k!^2} = \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k}.$$

Chap. :
- *Pol*

32. D'après la Q23, on a pour tout $x \in]-1,1[$,

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k} B_{k-l}^k B_l^k (x-1)^l(1+x)^{k-l} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\binom{k}{k-l}(x-1)^l(1+x)^{k-l},$$

Chap. :
- *Fonctions*

en utilisant la Q10. On en déduit donc que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$L_k(-x) = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\binom{k}{k-l}(-1)^l(x+1)^l(-1)^{k-l}(x-1)^{k-l} = (-1)^k L_k(x).$$

On en déduit donc que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, L_k et k ont la même parité.

33. D'après l'expression obtenue à la question précédente, on a que $L_k(1)$ correspond au terme $l=0$ évalué en $x=1$. On en déduit donc par parité que

$$L_k(1) = \frac{1}{2^k}2^k = 1, L_k(-1) = (-1)^k L_k(1) = (-1)^k.$$

5.2 Une équation différentielle vérifiée par les L_k

34. On remarque déjà que g_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. On calcule alors pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g_k'(x) = -2kx(1-x^2)^{k-1}.$$

Chap. :
- *Der.*

On en déduit donc que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1-x^2)g_k'(x) = -2kxg_k(x).$$

35. On souhaite dériver $k+1$ fois l'expression précédente (ce qui est possible car toutes les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$). On a alors par la règle de Leibniz que pour tout $x \in]-1,1[$,

Chap. :
- *Der.*

$\left(\text{avec la notation } \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}f(x) = f^{(k)}(x)\right)$,

$$\sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}[1-x^2]g_k^{(k+2-l)}(x) = \sum_{l=0}^{k+1}\binom{k+1}{l}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}[-2kx]g_k^{(k+1-l)}(x).$$

En développant, on obtient donc que

$$(1-x^2)g_k^{(k+2)}(x) - 2(k+1)xg_k^{(k+1)}(x) - k(k+1)g_k^{(k)}(x) = -2kxg_k^{(k+1)}(x) - 2k(k+1)g_k^{(k)}(x).$$

Ainsi,

$$(1-x^2)g_k^{(k+2)}(x) - 2xg_k^{(k+1)}(x) + k(k+1)g_k^{(k)}(x) = 0.$$

On obtient alors le résultat souhaité en multipliant par $\dfrac{(-1)^k}{2^k k!}$.

5.3 Une majoration de L_k sur $[-1,1]$

36. La fonction f_k définit dans l'énoncé est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= 2L_k(x)L_k'(x) - \frac{2x}{k(k+1)}(L_k'(x))^2 + \frac{1-x^2}{k(k+1)}(2L_k''(x)L_k'(x)) \\ &= 2L_k(x)L_k'(x) - \frac{2x}{k(k+1)}(L_k'(x))^2 + \frac{2L_k'(x)}{k(k+1)}(2xL_k'(x) - k(k+1)L_k(x)) \\ &= \frac{2x}{k(k+1)}(L_k'(x))^2 \geq 0, \end{aligned}$$

Chap. :
- *Der.*

en utilisant la Q35. On en déduit donc que f_k est croissante sur $[0,1]$.

37. On remarque que f_k est positive sur $[0,1]$. De plus, $f_k(1) = L_k(1)^2 = 1$ d'après Q33. On en déduit donc par la question précédente que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f_k(x) \leq 1$. Or, pour tout $x \in [0,1]$, $L_k(x)^2 \leq f_k(x) \leq 1$. On en déduit donc que pour tout $x \in [0,1]$, $|L_k(x)| \leq 1$. Par la parité de L_k déterminée en Q32, on en déduit que pour tout $x \in [-1,1]$, $|L_k(x)| \leq 1$.

5.4 Relation entre L_{k-1}, L_k et L_{k+1}

38. D'après Q14 et Q31, on a

$$a_k = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}\frac{(2k+2)!}{(k+1)!^2}}{\frac{1}{2^k}\frac{(2k)!}{k!^2}} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k+1}.$$

Chap. :
- *Calcul*

39.

> On peut utiliser les expressions déterminées en Q15 à l'exception près que les L_k ne sont pas normalisées.

Chap. :
- *Calcul*
- *Der.*
- *Primitive*

On note $\gamma_k = \dfrac{1}{2^k}\dfrac{(2k)!}{k!^2}$ le coefficient dominant de L_k déterminé en Q31. On sait alors que

$$L_{k+1} = \left(\frac{2k+1}{k+1}X + b_k\right)L_k + c_k L_{k-1}.$$

On sait d'après Q15,

$$b_k = -\frac{\gamma_{k+1}\langle XL_k, L_k\rangle}{\gamma_k \|L_k\|^2}.$$

Or,

$$\langle XL_k, L_k\rangle = \int_{-1}^{1} t(L_k(t))^2 \,\mathrm{d}t.$$

Cependant, d'après Q32, $t \mapsto t(L_k(t))^2$ est impaire. On en déduit donc que $\langle XL_k, L_k\rangle = 0$ et donc $b_k = 0$.

Pour c_k, l'expression déterminée en Q15 demande de calculer les normes des L_k ce qui est difficile. Toutefois, on peut exploiter le fait que c_k existe et que l'on connaît les $L_k(1)$ d'après Q33. Ainsi, en évaluant l'expression en 1, on a

$$1 = \frac{2k+1}{k+1} + c_k,$$

i.e.

$$c_k = \frac{-k}{k+1},$$

ce qui conclut.

5.5 Un développement en série entière faisant intervenir les L_k

40. D'après Q37, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|L_k(x)| \leq 1$. On en déduit donc que pour tout $t \in]-1,1[$, $|L_k(x)t^k| \leq |t|^k$ qui est le terme d'une série convergente. On en déduit donc que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à 1.

Chap. :
- *Sér. Ent.*

41. Par théorème de dérivation des séries entières dans le disque ouvert de convergence, on a que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et que pour tout $t \in]-1,1[$,

Chap. :
- *Sér. Ent.*

$$S'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} kL_k(x)t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)L_{k+1}(x)t^k.$$

On en déduit donc en exploitant la relation de Q39 que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} S'(t) &= L_1(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}(2k+1)xL_k(x)t^k - \sum_{k=1}^{+\infty} kL_{k-1}(x)t^k \\ &= L_1(x) - xL_0(x) + x\sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x)t^k + 2x\sum_{k=0}^{+\infty} kL_k(x)t^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)L_k(x)t^{k+1} \\ &= xS(t) + 2xtS'(t) - t^2S'(t) - tS(t), \end{aligned}$$

car $L_1(x) = x = xL_0(x)$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)L_k(x)t^{k+1} = t^2\sum_{k=1}^{+\infty} kL_k(x)t^{k-1} + t\sum_{k=0}^{+\infty} L_k(x)t^k = t^2S'(t) + tS(t).$$

On en déduit donc bien que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$(1-2xt+t^2)S'(t) + (t-x)S(t) = 0.$$

42. On remarque que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$1 - 2xt + t^2 = 1 - x^2 + (t-x)^2 > 0.$$

Chap. :
- *Sér. Ent.*
- *Primitive*
- *EqDif1A*

En effet, ce terme est positif car $x^2 \leq 1$ et si celui-ci est nul alors $x^2 = 1$ et $t = x$, absurde car $t^2 < 1$. On en déduit donc que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$S'(t) + \frac{(t-x)}{1-2xt+t^2}S(t) = 0.$$

Or, la fonction $t \in]-1,1[\mapsto \dfrac{(t-x)}{1-2xt+t^2}$ est continue sur $]-1,1[$ et admet $\dfrac{1}{2}\ln\left(1-2xt+t^2\right)$ comme unique primitive qui s'annule en 0. On en déduit donc par le théorème de Cauchy linéaire que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$S(t) = S(0)\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1-2xt+t^2\right)\right) = \frac{S(0)}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

Or, $S(0) = L_0(x) = 1$. On en déduit donc que pour tout $t \in]-1,1[$,

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

***

FIN DU SUJET

***

Index des chapitres