

Correction

CONCOURS COMMUN INP (CCINP) 2026

Filière : PC

Épreuve : Physique

Durée : 4 heures

Nanorhéologie par appareil à force dynamique de surface

Mode d'emploi du corrigé

Ce corrigé met en exergue dans une telle boîte verte les questions *réalisables dès la SUP*.

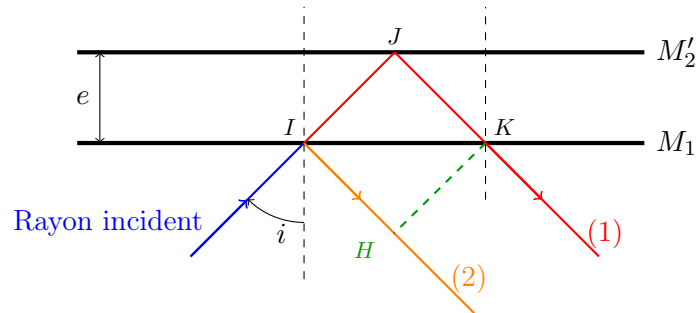
Il s'agit des questions 5, 6, 8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 et 27.

A droite de chaque bandeau est indiqué la référence de **la fiche de cours Optimal SupSpé** du chapitre mobilisé par la question.

Partie 1 - MESURE DE LA FORCE S'EXERÇANT SUR LE PLAN

1.1 Mesure interférométrique du déplacement du plan

Question 1



Soient deux rayons issus d'une source S à l'infini dans la direction i , interférant en un point M situé à l'infini. $n = 1$ est l'indice de l'air.

$$\delta(i) = [S \dots K \dots M_{\infty}]_{(1)} - [S \dots I \dots M_{\infty}]_{(2)} \quad (\text{Définition})$$

$$\delta(i) = (IJ + JK) - IH \quad (\text{Théorème de Malus, } n = 1)$$

$$\delta(i) = \frac{e}{\cos(i)} + \frac{e}{\cos(i)} - IK \sin(i) \quad (\text{Géométrie : } IJ = JK = e/\cos(i) \text{ et } IH = IK \sin(i))$$

$$\delta(i) = \frac{2e}{\cos(i)} - (2e \tan(i)) \sin(i) \quad (\text{Propriété } IK = 2e \tan(i))$$

$$\delta(i) = \frac{2e}{\cos(i)} (1 - \sin^2(i)) \quad (\text{Factorisation par } 2e/\cos(i))$$

$$\delta(i) = \frac{2e}{\cos(i)} \cos^2(i) \quad (\text{Relation fondamentale } \cos^2(i) + \sin^2(i) = 1)$$

$$\delta(i) = 2e \cos(i)$$

Question 2

L'intensité lumineuse $I(M)$ dépend de δ et donc uniquement fonction de l'inclinaison i :

$$\begin{aligned}\delta(i) &= 2e \cos(i) \quad (\text{D'après Q1}) \\ I(M) &= I_0[1 + \cos(\phi(i))] \quad (\text{Formule des interférences})\end{aligned}$$

Par **symétrie de révolution** autour de l'axe optique, les lieux d'isointensité, et donc les états d'interférences sont des cercles.

Iso-intensité $\iff i = \text{cste}$: franges d'égale inclinaison.

En l'absence de condenseur, le faisceau incident est **collimaté** (parallèle à l'axe).

$$\begin{aligned}i &= 0 \quad (\text{Faisceau cylindrique}) \\ \delta &= 2e \quad (\text{car } \cos(0) = 1)\end{aligned}$$

La différence de marche est uniforme sur la section du faisceau.

Observation d'une teinte plate (éclairage uniforme).

Question 3

Le contact optique correspond à une **épaisseur de lame d'air nulle**.

$$\begin{aligned}e &\rightarrow 0 \quad (\text{Définition du contact optique}) \\ p_0 &= \frac{2e}{\lambda} \rightarrow 0 \quad (\text{Ordre d'interférence au centre})\end{aligned}$$

Pour un anneau brillant d'ordre $p_k = p_0 - k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ($p_k < p_0$ car $i > 0$ et $\delta(i) < \delta(0)$), on a :

$$\begin{aligned}p(i_k) &= \frac{\delta(i_k)}{\lambda} = \frac{2e \cos(i_k)}{\lambda} \quad (\text{Relation } \delta = \lambda p) \\ p(i_k) &= p_0 \cos(i_k) \quad (\text{Relation } \delta = \lambda p) \\ \cos(i_k) &= \frac{p_k}{p_0} \\ \cos(i_k) &= \frac{p_0 - k}{p_0} = 1 - \frac{k\lambda}{2e} \quad (\text{Car } p_k \text{ diminue quand } e \text{ diminue})\end{aligned}$$

Lorsque e diminue, le terme $\frac{k\lambda}{2e}$ augmente, donc $\cos(i_k)$ diminue.
Par décroissance du cosinus sur $[0, \pi/2]$, l'angle i_k augmente.

Il faut augmenter le rayon des anneaux (les anneaux "sortent").

Question 4

D'après le schéma de la fig. 2, la lame d'air équivalente est formée par le miroir M_1 et l'image M_2' du miroir M_2 par la lame séparatrice puis par le miroir à 45° . L'épaisseur e de la lame d'air est la différence entre les distances à la séparatrice des deux miroirs effectifs.

$$e = |d_1 + d - d_2| \quad (\text{Géométrie du dispositif})$$

$$e = 0 \quad (\text{Condition de contact optique})$$

$$d_1 + d - d_2 = 0$$

$$d_2 = d_1 + d$$

Question 5

Fiche de cours 1.1 Formation des images

D'après l'énoncé, les interférences sont localisées sur les miroirs (configuration en coin d'air). Pour observer des franges nettes, l'écran doit être conjugué avec le plan des miroirs par la lentille (\mathcal{L}'). Le plan des miroirs est situé à une distance D en amont de la lentille : $\overline{OA} = -D$.

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad (\text{Relation de conjugaison de Descartes})$$

$$\frac{1}{D'} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'} \quad (\text{Substitution avec } D' = \overline{OA'})$$

$$\frac{1}{D'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{D} = \frac{D - f'}{Df'} \quad (\text{Mise au même dénominateur})$$

$$D' = \frac{Df'}{D - f'}$$

Question 6

Fiche de cours 1.1 Formation des images

L'incidence étant quasi-normale, la différence de marche en un point des miroirs d'ordonnée y est $\delta(y) = 2e_0(y)$.

$$e_0(y) = y \tan(\alpha) \approx y\alpha \quad (\text{Géométrie du coin d'air, } \alpha \ll 1)$$

$$\delta(y) = 2y\alpha \quad (\text{Expression de la différence de marche})$$

Les franges sont les lieux d'égale épaisseur $e_0(y)$, soit $y = \text{cste}$.
Sur les miroirs, ce sont des droites parallèles à l'arête du coin d'air.

Franges rectilignes d'égale épaisseur.

L'ordre d'interférence $p(y)$ sur les miroirs est donné par :

$$p(y) = \frac{\delta(y)}{\lambda} = \frac{2\alpha y}{\lambda} \quad (\text{Définition})$$

L'interfrange sur les miroirs i_y correspond à une variation $\Delta p = 1$:

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{\lambda} \Delta y = 1 \quad (\text{Condition d'interfrange})$$

$$i_y = \frac{\lambda}{2\alpha} \quad (\text{Interfrange dans le plan objet})$$

L'interfrange i_e sur l'écran est l'image de i_y par le grandissement transversal γ de la lentille.

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{D'}{-D} \quad (\text{Définition du grandissement})$$

$$i_e = |\gamma| \cdot i_y \quad (\text{Relation de grandissement})$$

$$i_e = \frac{D'}{D} \cdot \frac{\lambda}{2\alpha} \quad (\text{Substitution})$$

$$i_e = \frac{D'\lambda}{2D\alpha}$$

Question 7

Lorsque le miroir M_2 se déplace de x vers la gauche, la distance entre la séparatrice et M_2 devient $d_2 - x$. Le chemin optique du bras correspondant est diminué de $2x$ (aller-retour).

$$\delta(x) = [S \dots M_1 \dots M] - [S \dots M_2(x) \dots M] \quad (\text{Définition})$$

$$\delta(x) = [S \dots M_1 \dots M] - ([S \dots M_2(0) \dots M] - 2x) \quad (\text{Déplacement de } M_2)$$

$$\delta(x) = \delta_0 + 2x \quad (\text{Par identification de } \delta_0)$$

$$\delta(x) = \delta_0 + 2x$$

Question 8

Fiche de cours 1.6 Propagation

L'éclairement résultant de l'interférence de deux ondes de même amplitude et d'éclairement individuel \mathcal{E}_0 est donné par la **formule de Fresnel** :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 + 2\sqrt{\mathcal{E}_0\mathcal{E}_0} \cos\left(\frac{2\pi\delta(x)}{\lambda}\right) \quad (\text{Formule de Fresnel})$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi(\delta_0 + 2x)}{\lambda}\right) \right] \quad (\text{Substitution de } \delta(x))$$

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi\delta_0}{\lambda}\right) \right] \quad (\text{Développement})$$

Par identification avec la forme proposée $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2}(1 + \cos(\frac{4\pi x}{\lambda} + \Psi))$:

$$\frac{\mathcal{E}_{max}}{2} = 2\mathcal{E}_0 \implies \mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0 \quad (\text{Identification de l'amplitude})$$

$$\Psi = \frac{2\pi\delta_0}{\lambda} \quad (\text{Identification de la phase})$$

$$\mathcal{E}_{max} = 4\mathcal{E}_0 \quad \text{et} \quad \Psi = \frac{2\pi\delta_0}{\lambda}$$

Question 9

La sensibilité est définie par $S = \left| \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|$.

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left[-\frac{4\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{4\pi x}{\lambda} + \Psi\right) \right] \quad (\text{Dérivation de Q8})$$

$$S(x) = \frac{2\pi\mathcal{E}_{max}}{\lambda} \left| \sin\left(\frac{4\pi x}{\lambda} + \Psi\right) \right| \quad (\text{Expression de la sensibilité})$$

$$S(0) = \frac{2\pi\mathcal{E}_{max}}{\lambda} |\sin(\Psi)| \quad (\text{Sensibilité au voisinage de } x = 0)$$

La sensibilité est maximale pour $|\sin(\Psi)| = 1$.

$$S = \frac{2\pi\mathcal{E}_{max}}{\lambda} |\sin(\Psi)| \quad \text{maximale pour} \quad \Psi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

Question 10

On choisit deux valeurs successives maximisant la sensibilité, soit $\Psi_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\Psi_2 = -\frac{\pi}{2}$. Pour $x \ll \lambda$, on effectue un développement limité à l'ordre 1 en $4\pi x/\lambda$:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (\text{Substitution de } \Psi_1)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{trigonométrie})$$

$$\mathcal{E}_1 \approx \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left(1 - \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \quad (\text{DL}_1 \text{ pour } x \ll \lambda)$$

De même pour $\Psi_2 = -\frac{\pi}{2}$:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (\text{Substitution de } \Psi_2)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left[1 + \sin \left(\frac{4\pi x}{\lambda} \right) \right] \quad (\text{trigonométrie})$$

$$\mathcal{E}_2 \approx \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left(1 + \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \quad (\text{DL}_1 \text{ pour } x \ll \lambda)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left(1 - \frac{4\pi x}{\lambda} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{max}}{2} \left(1 + \frac{4\pi x}{\lambda} \right)$$

Question 11

L'ALI possède une **boucle de rétroaction** sur son entrée inverseuse ($-$) via la résistance R_1 .

Rétroaction sur $V_- \implies$ Régime linéaire (Condition de stabilité)

$V_+ = V_- = 0 \text{ V}$ (ALI idéal en régime linéaire)

La cathode de la photodiode est reliée à $V_- = 0$ et son anode à la masse (0 V).

La tension à ses bornes est donc nulle.

Régime linéaire et photodiode en court-circuit.

Question 12

L'ALI est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire ($V_- = V_+ = 0$).

D'après la loi des nœuds exprimée en termes de potentiels au point V_- :

$$V_- = \frac{\frac{U_s}{R_1} + I_{cc}}{\frac{1}{R_1}} \quad (\text{Loi des nœuds en potentiels})$$

$$0 = \frac{U_s}{R_1} + I_{cc} \quad (\text{Car } V_- = 0)$$

$$\frac{U_s}{R_1} = -I_{cc}$$

$$U_s = -R_1 \beta \mathcal{E} \quad (\text{Relation } I_{cc} = \beta \mathcal{E})$$

$$U_s = -R_1 \beta \mathcal{E}$$

Question 13

On exprime d'abord U_1 et U_2 en fonction de x via \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 (d'après Q10 et Q12) :

$$U_2 - U_1 = -R_1 \beta (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = -R_1 \beta \mathcal{E}_{max} \frac{4\pi x}{\lambda} \quad (\text{Différence})$$

$$U_2 + U_1 = -R_1 \beta (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1) = -R_1 \beta \mathcal{E}_{max} \quad (\text{Somme})$$

$$U_{opt} = K \frac{-R_1 \beta \mathcal{E}_{max} (4\pi x / \lambda)}{-R_1 \beta \mathcal{E}_{max}} \quad (\text{Substitution dans } U_{opt})$$

$$U_{opt} = K \frac{4\pi x}{\lambda}$$

Pour $U_{opt,min} = 2 \cdot 10^{-4}$ V et $K = 10$ V, le déplacement minimal x_{min} est :

$$x_{min} = \frac{U_{opt,min} \lambda}{4\pi K} \quad (\text{Inversion de la formule})$$

$$x_{min} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \cdot 633 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 10} \quad (\text{AN})$$

$$x_{min} \approx \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3 \cdot 10} \quad (\text{Ordres de grandeur : } \lambda \approx 6 \cdot 10^2 \text{ nm et } \pi \approx 3)$$

$$x_{min} \approx \frac{12 \cdot 10^{-11}}{12 \cdot 10^1}$$

$$x_{min} \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$x_{min} \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

1.2 Réponse mécanique du cantilever

Question 14

Fiche de cours 2.2 Lois de Newton

\vec{F}_r modélise l'**élasticité** du cantilever L_2 (force de rappel élastique). \vec{f}_v modélise les frottements fluides (visqueux) ou la dissipation interne dans le matériau du cantilever.

Question 15

Fiche de cours 1.4 Oscillateurs libres et forcé

Les signaux complexes

$$\underline{F}(t) = \underline{F}_1 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{x}(t) = \underline{x}_1 e^{j\omega t}$$

Avec les amplitudes complexes :

$$\underline{F}_1 = F_1 e^{j\psi} \quad \text{et} \quad \underline{x}_1 = x_1 e^{j\varphi}$$

Question 16

Fiche de cours 1.4 Oscillateurs libres et forcés

Référentiel terrestre supposé galiléen.

Système : {plan + porte-plan} de masse m .

PFD projeté sur \vec{u}_x :

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + F(t)$$

$$(j\omega)^2 m \underline{x}_1 + j\omega \mu \underline{x}_1 + k \underline{x}_1 = \underline{F}_1 \quad (\text{Passage en complexe})$$

$$\underline{x}_1 [k + j\omega\mu - m\omega^2] = \underline{F}_1$$

$$\underline{H}_m = \frac{k \underline{x}_1}{\underline{F}_1} = \frac{k}{k + j\omega\mu - m\omega^2}$$

$$\underline{H}_m = \frac{1}{1 + j \frac{\mu}{k} \omega - \frac{m}{k} \omega^2}$$

Par identification avec la forme canonique $\frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Pulsation propre : sans dissipation}$$

$$Q = \frac{k}{\mu\omega_0} = \frac{\sqrt{mk}}{\mu} \quad \text{Facteur de qualité : inverse de l'amortissement}$$

Question 17

Fiche de cours 1.5 Filtres électriques

Le module de la fonction de transfert est :

$$|H_m| = \frac{1}{|1 - \xi^2 + j\frac{\xi}{Q}|} \quad (\text{avec } \xi = \omega/\omega_0)$$

$$|H_m| = \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)^2 + \frac{\xi^2}{Q^2}}}$$

Question 18

Fiche de cours 1.5 Filtres électriques

Les variations de $f(\xi^2) = (1 - \xi^2)^2 + \frac{\xi^2}{Q^2}$ présentent un minimum (donc une résonance de $|H_m|$) si sa dérivée s'annule :

$$\xi_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (\text{Pulsation de résonance})$$

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Condition de résonance})$$

On peut considérer $\omega_r \approx \omega_0$ si le terme $\frac{1}{2Q^2} \ll 1$.

$$\text{Résonance si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Si } Q \gg 1, \text{ alors } \omega_r \approx \omega_0.$$

Question 19

Fiche de cours 1.5 Filtres électriques

D'après la fig. 6, le module $|H_m|$ présente un pic de résonance très aigu, ce qui permet d'assimiler la fréquence de résonance f_r à la fréquence propre f_0 .

$$f_0 \approx 35 \text{ Hz} \quad (\text{Lecture graphique du sommet du pic})$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

$$\omega_0 \approx 2 \cdot 3 \cdot 35 \approx 2 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{AN})$$

Le facteur de qualité Q est le maximum de la fonction de transfert à la résonance, puisque pour $Q \gg 1$, $|H_m|_{max} \approx Q$.

$$|H_m|_{max} \approx 100 \quad (\text{Lecture graphique en échelle logarithmique})$$

$$Q \approx |H_m|_{max} \quad (\text{Approximation pour résonance aiguë})$$

$$\omega_0 \approx 2 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q \approx 1 \cdot 10^2$$

Question 20

Fiche de cours 1.4 Oscillateurs libres et forcés

La nouvelle pulsation propre ω_0 du système lesté par la masse m_a est :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m + m_a} \quad (\text{Définition de la pulsation propre})$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{k} m_a + \frac{m}{k}$$

Le graphe $\frac{1}{\omega_0^2} = f(m_a)$ est une droite de pente $a = 1/k$.

D'après la figure 7, on calcule la pente à l'aide des points extrêmes :

$$a = \frac{(20,6 - 19,2) \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3} - 0} \quad (\text{Lecture graphique})$$

$$a = \frac{1,4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} \approx 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$k = \frac{1}{a} \approx \frac{1}{0,35 \cdot 10^{-3}} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{AN})$$

L'ordonnée à l'origine permet de déduire la masse m du système seul (m/k).

$$k \approx 3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{et on peut déduire la masse } m.$$

Question 21

Fiche de cours 1.5 Filtres électriques

L'appareil utilise la relation $F_1 = \frac{kx_1}{|H_m|}$. À la fréquence $f = 40 \text{ Hz}$, on a $\xi = 40/35 \approx 1,1$. D'après la figure 6, pour $f = 40 \text{ Hz}$, on lit $|H_m| \approx 10$ (pente de la résonance).

$$k = \frac{F_1 |H_m|}{x_1} \quad (\text{Inversion de la relation})$$

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10}{2 \cdot 10^{-9}} \quad (\text{AN avec } x_1 = 2 \text{ nm et } F_1 = 2 \mu\text{N})$$

$$k = 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

On observe un écart avec la valeur précédente ($3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$). Cela peut s'expliquer par l'incertitude de lecture sur $|H_m|$ dans une zone à forte pente ou une calibration différente.

$$k \approx 1 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Partie 2 - Mesure du déplacement relatif

Question 22

On compare les dimensions caractéristiques du condensateur : le rayon $R = 3$ cm et l'écartement $\ell \approx 50 \mu\text{m}$. Comme $R \gg \ell$ (facteur 600), les effets de bord sont négligeables au centre. On peut donc supposer les armatures infinies.

Tout plan contenant l'axe (Ox) est plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ \vec{E} appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, x)\vec{u}_x \quad (\text{Direction axiale})$$

La distribution est invariante par rotation autour de (Ox) et par translations selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ (modèle infini).

$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x \quad (\text{Invariances})$$

$$\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$$

Question 23

À l'intérieur du condensateur (vide), on utilise l'équation de **Maxwell-Gauss** :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (\text{MG})$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = 0 \quad (\text{divergence en cartésiennes})$$

$$E(x) = \text{cste} \quad (\text{Intégration})$$

Le champ \vec{E} est uniforme.

Question 24

On utilise l'équation de **Maxwell-Faraday** en régime statique : $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$.

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) \quad (\text{analyse vectorielle})$$

$$E = -\frac{dV}{dx} \quad (\text{Projection sur } \vec{u}_x)$$

$$V(x) = -Ex + C \quad (\text{Intégration})$$

On utilise les potentiels aux armatures ($x_O = 0$ et $x_A = \ell$ d'après la figure 8) :

$$V_O - V_A = (-E \cdot 0 + C) - (-E \cdot \ell + C) = E\ell \quad (\text{Calcul de la tension})$$

$$E = \frac{V_O - V_A}{\ell} = \frac{U}{\ell} \quad (\text{Expression de la norme})$$

$$\vec{E} = \frac{U}{\ell} \vec{u}_x$$

Question 25

L'énergie électrostatique E_e est l'intégrale de la densité volumique u_e sur le volume \mathcal{V} du condensateur.

$$E_e = \iiint_{\mathcal{M} \in \mathcal{V}} u_e(M) d\tau(M) = u_e \cdot \mathcal{V} \quad (\text{Car } \vec{E} \text{ est uniforme})$$

$$E_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot (\pi R^2 \ell) \quad (\text{Volume d'un cylindre})$$

$$E_e = \frac{\varepsilon_0 (U/\ell)^2}{2} \cdot \pi R^2 \ell \quad (\text{Substitution de } E)$$

$$E_e = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2 U^2}{2\ell}$$

Question 26

L'expression générale de l'énergie stockée est :

$$E_e = \frac{1}{2} CU^2$$

Par identification avec le résultat de la Q.25 :

$$\frac{1}{2} CU^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{2\ell} U^2 \quad (\text{Égalité})$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell}$$

Question 27

Fiche de cours 1.3 Circuits électriques en régime transitoire

D'après la loi des mailles pour le circuit LC (en convention récepteur pour les deux dipôles) :

$$u_L + u_C = 0 \quad (\text{Loi des mailles})$$

$$L \frac{di}{dt} + u_C = 0 \quad (\text{Relation constitutive de la bobine})$$

$$L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + u_C = 0 \quad (\text{Relation } i = C \frac{du_C}{dt})$$

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \quad (\text{Équation différentielle})$$

La pulsation propre est $\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On en déduit la fréquence $f_{LC} = \frac{\omega_{LC}}{2\pi}$.

$$f_{LC} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Question 28

On utilise l'expression de la capacité C trouvée à la Q26 ($C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell}$) dans la relation de la fréquence :

$$f_{LC}^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \quad (\text{Élévation au carré})$$

$$f_{LC}^2 = \frac{1}{4\pi^2 L \left(\frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{\ell} \right)} \quad (\text{Substitution de } C)$$

$$f_{LC}^2 = \frac{\ell}{4\pi^3 \varepsilon_0 L R^2}$$

$$\ell = 4\pi^3 \varepsilon_0 L R^2 f_{LC}^2$$

Question 29

On différencie l'expression de ℓ par rapport à f_{LC} :

$$d\ell = 4\pi^3 \varepsilon_0 L R^2 \cdot (2f_{LC} df) \quad (\text{Différentiation de } f^2)$$

$$d\ell = \frac{\ell}{f_{LC}^2} \cdot 2f_{LC} df = 2\ell \frac{df}{f_{LC}} \quad (\text{Réintroduction de } \ell)$$

Application numérique pour la variation minimale $d\ell_{min}$:

$$d\ell_{min} = 2 \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{0,2}{10 \cdot 10^6} \quad (\text{Valeurs : } \ell = 50\mu\text{m}, df = 0,2 \text{ Hz}, f = 10 \text{ MHz})$$

$$d\ell_{min} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-8}$$

$$d\ell_{min} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$d\ell = 2\ell \frac{df}{f_{LC}} \quad \text{et} \quad d\ell_{min} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

2.1 Perturbation liée à l'écoulement de l'air

Question 30

On considère un volume élémentaire fixe $d\tau = dx dy dz$ entre x et $x + dx$.
Le bilan de masse pendant dt s'écrit : $\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt = dm_{entrant} - dm_{sortant}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau dt &= \rho v_x(x) dy dz dt - \rho v_x(x + dx) dy dz dt \quad (\text{Bilan 1D}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz &= -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz \quad (\text{Développement à l'ordre 1}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} &= 0 \quad (\text{Simplification})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Question 31

La dérivée particulaire suit une particule fluide dans son mouvement :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\rho \quad (\text{Définition})$$

En développant $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho$, l'équation de conservation devient :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{Équation de continuité})$$

Un écoulement est incompressible si la masse volumique d'une particule fluide reste constante : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

$$\text{Incompressible} \iff \text{div}(\vec{v}) = 0$$

Question 32

Le débit volumique D_v à travers une surface fermée S est $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$.

$$\begin{aligned}D_v &= \iiint_V \text{div}(\vec{v}) d\tau \quad (\text{Théorème de Green-Ostrogradski}) \\ D_v &= \iiint_V 0 d\tau = 0 \quad (\text{Car } \text{div}(\vec{v}) = 0)\end{aligned}$$

$$D_v = 0$$

Question 33

On se place dans le référentiel de l'armature O ($x = 0$). L'armature A se situe à $x = \ell(t)$.
Par condition de non-glissement (ou ici d'imperméabilité puisque \vec{u}_x est normal aux parois) :

$$\begin{aligned} v_x(r, x = 0, t) &= 0 \quad (\text{Vitesse de l'armature fixe } O) \\ v_x(r, x = \ell, t) &= \dot{\ell}(t) \quad (\text{Vitesse de l'armature mobile } A) \end{aligned}$$

$$v_x(0) = 0 \quad \text{et} \quad v_x(\ell) = \dot{\ell}(t)$$

Question 34

Soit un cylindre de rayon r et de hauteur ℓ , centré sur l'axe (Ox).
Le débit sortant total est nul (Q32).

$$\begin{aligned} \iint_{\text{base}(O)} \vec{v} \cdot (-\vec{u}_x) dS + \iint_{\text{base}(A)} \vec{v} \cdot \vec{u}_x dS + \iint_{\text{lat}} \vec{v} \cdot \vec{u}_r dS &= 0 \\ 0 + \pi r^2 \dot{\ell}(t) + 2\pi r \ell(t) u(r, t) &= 0 \quad (\text{Flux à travers les surfaces}) \\ u(r, t) &= -\frac{\pi r^2 \dot{\ell}(t)}{2\pi r \ell(t)} = -\frac{r \dot{\ell}(t)}{2\ell(t)} \end{aligned}$$

Comme $\ell_1 \ll \ell_0$, on a $\ell(t) \approx \ell_0$. Pour l'ordre de grandeur de $u(R)$:

$$\begin{aligned} |u(R)| &\approx \frac{R \ell_1 \omega}{2\ell_0} \quad (\text{Car } \dot{\ell} \sim \ell_1 \omega) \\ |u(R)| &\approx \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9} \cdot 10^2}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} \quad (\text{AN : } \omega \sim 100 \text{ rad/s, } \ell_1 \sim 1 \text{ nm}) \\ |u(R)| &\approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$u(r, t) \approx -\frac{r \dot{\ell}}{2\ell_0} \quad \text{et} \quad |u(R)| \sim 10^{-5} \text{ m/s}$$

Question 35

Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{\rho_a U \ell_0}{\eta_a}$.

Avec $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $U \approx 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\ell_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ et $\eta_a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$:

$$Re \approx \frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-5}} \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$$

Comme $Re \ll 1$, les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux.

Le terme convectif $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ peut être négligé.

$$Re \sim 10^{-5} \quad \text{et on néglige le terme convectif.}$$

Question 36

Comparons les ordres de grandeur du terme d'accélération instationnaire et du terme visqueux :

$$\rho_a \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \rho_a U \omega \approx 1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$$
$$\eta_a \|\Delta \vec{v}\| \sim \eta_a \frac{U}{\ell_0^2} \approx 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{10^{-5}}{(5 \cdot 10^{-5})^2} \approx 8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$$

Le terme instationnaire est négligeable devant le terme visqueux. L'écoulement est **quasi-stationnaire**.

$$\rho_a \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \ll \eta_a \Delta \vec{v}$$

Question 37

En négligeant l'inertie, Navier-Stokes devient : $\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \eta_a \Delta \vec{v}$.

Projection sur \vec{u}_x :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta_a \Delta v_x$$

Comme $v_x \ll v_r$, on a $\frac{\partial P}{\partial x} \approx 0$. La pression ne dépend pas de x .

Projection sur \vec{u}_r :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta_a \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \dots \right)$$

Par analyse d'échelles, $\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \sim \frac{U}{\ell_0^2}$ domine largement $\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \sim \frac{U}{R^2}$ car $\ell_0 \ll R$.

$$\eta_a \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial r}$$

Question 38

Comme P ne dépend pas de x , alors $\frac{\partial P}{\partial r}$ est constant selon x .

L'équation $\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = \text{cte}$ s'intègre deux fois par rapport à x : $v_r(x)$ est un polynôme de degré 2.

$$v_r(r, x, t) = a(r, t)x^2 + b(r, t)x + c(r, t)$$

Question 39

La vitesse moyenne est définie par $u(r, t) = \frac{1}{\ell_0} \int_0^{\ell_0} v_r(r, x, t) dx$.

Avec les conditions aux limites de non-glissement $v_r(0) = 0$ et $v_r(\ell_0) = 0$, le profil est de la forme $v_r = Ax(\ell_0 - x)$.

$$u(r, t) = \frac{A}{\ell_0} \int_0^{\ell_0} (x\ell_0 - x^2) dx = \frac{A}{\ell_0} \left[\frac{\ell_0^3}{2} - \frac{\ell_0^3}{3} \right] = \frac{A\ell_0^2}{6}$$

$$A = \frac{6u(r, t)}{\ell_0^2} \implies v_r(r, x, t) = \frac{6u(r, t)}{\ell_0} x \left(1 - \frac{x}{\ell_0} \right)$$

$$v_r(r, x, t) = \frac{6u(r, t)}{\ell_0} x \left(1 - \frac{x}{\ell_0} \right)$$

Question 40

D'après Q37 et Q39 :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \eta_a \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} = \eta_a \left[-\frac{12u(r, t)}{\ell_0^2} \right]$$

En remplaçant $u(r, t)$ par $-\frac{r\dot{\ell}}{2\ell_0}$ (Q34) :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{12\eta_a}{\ell_0^2} \left(-\frac{r\dot{\ell}}{2\ell_0} \right) = \frac{6\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} r$$

$$P(r, t) = \int \frac{6\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} r dr = \frac{3\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} r^2 + C$$

À $r = R$, $P(R, t) = P_0$, donc $C = P_0 - \frac{3\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} R^2$.

$$P(r, t) = P_0 - \frac{3\eta_a\dot{\ell}(t)}{\ell_0^3} (R^2 - r^2)$$

Question 41

Fiche de cours 3.6 Statique des fluides

La force de pression \vec{F}_ν sur l'armature centrale (située en $x = 0$, normale $-\vec{u}_x$) est :

$$\vec{F}_\nu = \iiint (P(r, t) - P_0)(-\vec{u}_x) dS = \vec{u}_x \int_0^R \frac{3\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$\vec{F}_\nu = \vec{u}_x \frac{6\pi\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \vec{u}_x \frac{6\pi\eta_a\dot{\ell}}{\ell_0^3} \frac{R^4}{4}$$

$$\vec{F}_\nu = \frac{3\pi\eta_a R^4 \dot{\ell}(t)}{2\ell_0^3} \vec{u}_x$$

Question 42

L'étude précédente a montré que le mouvement des armatures génère un écoulement d'air radial. Ce flux, freiné par la viscosité η_a , induit une **surpression entre les disques**.

La force de pression résultante \vec{F}_ν , proportionnelle à ℓ_0^{-3} , est d'un ordre de grandeur comparable aux forces mesurées (plusieurs dizaines de μN), ce qui fausse les résultats.

En perçant les armatures :

- On permet à l'air de s'échapper plus facilement par les orifices plutôt que de devoir parcourir toute la distance radiale jusqu'au bord du disque.
- On diminue drastiquement la résistance visqueuse rencontrée par le fluide lors du rapprochement des plaques.
- On réduit ainsi la surpression locale et, par extension, l'amplitude de la force parasite \vec{F}_ν .

Les perçages servent à minimiser la force de traînée visqueuse de l'air pour ne pas perturber la mesure de la force principale.

Partie 3 - Application à la nanorhéologie

Question 43

L'énoncé définit la force de Reynolds s'exerçant sur le plan par :

$$\vec{F} = -\frac{6\pi\eta R_0^2}{h_0} \dot{h} \vec{u}_x \quad (\text{énoncé})$$

En utilisant $h(t) = h_0 - h_1 \cos(\omega t)$:

$$\dot{h} = j\omega h_1 \quad (\text{Passage en complexe})$$

La force s'écrit en complexe $\underline{F} = \underline{F}_1 e^{j\omega t}$ avec $\vec{F} = F(t) \vec{u}_x$. On identifie :

$$\underline{F}_1 = -\frac{6\pi\eta R_0^2}{h_0} (j\omega h_1) \quad (\text{Substitution})$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}_1}{h_1} = -j \frac{6\pi\eta R_0^2 \omega}{h_0} \quad (\text{Définition de l'impédance})$$

L'impédance est de la forme $\underline{Z} = Z' + jZ''$. Par identification :

- $Z' = 0$ (Partie réelle nulle : pas de force de rappel élastique ici).
- $Z'' = -\frac{6\pi\eta R_0^2 \omega}{h_0}$ (Partie imaginaire : traduit le caractère dissipatif visqueux).

$$\underline{Z} = -j \frac{6\pi\eta R_0^2 \omega}{h_0} \implies Z' = 0 \text{ et } Z'' = -\frac{6\pi\eta R_0^2 \omega}{h_0}$$

Question 44

Le modèle de la force de Reynolds prévoit que l'inverse de la partie imaginaire de l'impédance, $1/Z''$, est une fonction linéaire de la distance h_0 :

$$\frac{1}{Z''} = -\frac{h_0}{6\pi\eta R_0^2\omega} \quad (\text{D'après Q43})$$

D'après la figure 13, la courbe $1/Z'' = f(h_0)$ est effectivement une droite passant par l'origine sur la quasi-totalité de la plage de mesure (de $h_0 \approx 50$ nm jusqu'à 800 nm).

- Toutefois, le modèle est mis en défaut pour les très faibles distances (typiquement $h_0 < 50$ nm) :
- Observation : Sur la figure 12, Z'' s'écarte de la loi en $1/h_0$ et Z' (la partie réelle) commence à augmenter légèrement au lieu de rester nulle.
 - Interprétation physique : À ces échelles nanométriques, plusieurs phénomènes peuvent intervenir :
 1. **Effets de surface / Adsorption** : Les molécules de glycérol peuvent former des couches structurées sur le Pyrex, modifiant la viscosité locale (viscosité de confinement).
 2. **Rugosité** : La distance h_0 devient comparable à la rugosité moyenne des surfaces, rendant l'hypothèse de surfaces parfaitement lisses caduque.
 3. **Forces de Van der Waals** : Des interactions intermoléculaires attractives ou répulsives entre la sphère et le plan s'ajoutent à la force hydrodynamique.
 4. **Glissement à la paroi** : L'hypothèse de non-glissement peut ne plus être strictement vérifiée.

Validité pour $h_0 > 50$ nm
Écart dû au confinement ou aux interactions de surface.

Question 45

L'introduction d'une longueur de glissement b revient à considérer que le fluide se comporte comme s'il ne glissait pas sur une surface située à une profondeur b à l'intérieur du plan.

Mathématiquement, cela revient à remplacer la distance réelle h_0 par une distance effective $h_{eff} = h_0 + b$. D'après la question Q43, l'expression de $1/Z''$ devient :

$$\frac{1}{Z''} = \frac{h_0 + b}{6\pi\eta R_0^2 \omega} \quad (\text{Modèle avec glissement})$$

Graphiquement, la longueur de glissement b correspond à l'opposé de l'abscisse à l'origine (valeur de h_0 pour laquelle $1/Z'' = 0$) de la droite représentative du Pyrex silanisé (points gris).

- Pour le Pyrex seul (points noirs), la droite passe par l'origine : $b \approx 0$.
- Pour le Pyrex silanisé (points gris), la droite est décalée vers la gauche. En prolongeant la droite jusqu'à l'axe des abscisses sur la figure 14 :

$$h_0(1/Z'' = 0) \approx -20 \text{ nm} \quad (\text{Lecture graphique})$$

$$b = -(-20) = 20 \text{ nm} \quad (\text{Identification})$$

$$b \approx 20 \text{ nm}$$

L'importance de cette longueur b en nanorhéologie tient au fait qu'elle n'est plus négligeable devant les dimensions caractéristiques de l'écoulement.

- En **microscopie/macroscopie**, les distances h_0 sont de l'ordre du millimètre ou du micromètre (10^{-3} à 10^{-6} m). Une correction de 20 nm ($2 \cdot 10^{-8}$ m) représente une erreur relative infime ($< 1\%$), d'où son omission usuelle.
- En **nanorhéologie**, où h_0 peut descendre à 10 ou 50 nm, la longueur b est du même ordre de grandeur que l'épaisseur du film fluide. Elle modifie alors significativement le profil de vitesse et la force de résistance mesurée.

b est cruciale car $b \sim h_0$ à l'échelle nanométrique.