Groupe Ipesup
Optimal Sup-Spé

CCINP

Maths Spé – CPGE Concours 2026

Mathématiques MP-MPI – Épreuve 1

Corrigé du sujet

Préambule

- Ce sujet CCP contient deux exercices et un problème.
- Le premier exercice est un exercice d'informatique pour tous, exigeant la manipulation de SQL. Le correcteur ne s'étendra pas sur cette partie.
- Le second exercice est un exercice standard et proche du cours sur les probabilités. Il y a des questions de cours et des applications directes.
- Dans le problème, c'est de l'analyse découpée en trois parties.
- Dans la première partie, on étudie une intégrale à paramètres. On établit son existence, ses limites, sa continuité et régularité, puis on voit qu'elle satisfait une équation différentielle. C'est un exercice standard, assez proche du cours. Il y a quelques technicités à la question 12 et 13 mais pas assez pour décourager sensiblement le/la candidat(e) admissible.
- Dans la seconde partie, on travaille sur les coefficients de Fourier, devenu un exercice très classique. Les questions ont déjà été abordées dans nombre de sujets et ne sont pas originales. Si la technicité a été surmontée, cette partie devient assez simple.
- Enfin, dans la dernière partie, on applique les résultats des parties précédentes pour conclure. La difficulté reste la même tout le long et la dernière question est légèrement calculatoire.
- Au final, c'est le genre de sujet qu'on attend au concours commun INP : une difficulté modérée (voire assez facile par rapport à d'autres sujets CCP tombés en MP), des questions assez proches du cours avec des applications directes, et quelques questions un peu plus ardues.

Exercice 1

Attention ! Le correcteur signale que les questions d'informatique peuvent être fausses. Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur.

On répond aux questions 1 à 4.

1. On écrit

```
SELECT DISTINCT email
FROM ELEVES
WHERE promo <> 2025;
```

2. On écrit

```
SELECT ELEVES.nom, ELEVES.prenom, PAIEMENTS.montant
FROM ELEVES
JOIN PAIEMENTS ON ELEVES.id = PAIEMENTS.id_eleve
ORDER BY ELEVES.nom, ELEVES.prenom;
```

3. On écrit

```
SELECT id, email
FROM ELEVES
GROUP BY nom, prenom, email, promo
HAVING COUNT(*) > 1;
```

4. On écrit

```
SELECT ELEVES.id
FROM ELEVES
WHERE NOT EXISTS (
  SELECT *
  FROM PAIEMENTS
  WHERE ELEVES.id = PAIEMENTS.id_eleve
  AND PAIEMENTS.montant <> 0
  AND PAIEMENTS.date_paiement IS NOT NULL
);
```

Exercice 2

5. Soit $t \in [-1, 1]$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, |\mathbb{P}(X = n)t^n| \leq \mathbb{P}(X = n)$$
et la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge. Par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ converge absolument donc converge.
$$\boxed{\text{La fonction } G_X \text{ est donc bien définie sur } [-1, 1]}.$$

6. Soit $\lambda > 0$. On va montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$.
Soit donc $t \in \mathbb{R}$. Alors
$$\sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$
donc G_X est bien définie sur $\mathbb{R}$ et
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda t}}.$$

7. Soit $t \in]-1,1[$. Comme $X+Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_{X+Y}(t)$ est bien définie et
$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)t^n.$$
Or on a l'égalité des événements pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(X+Y=n) = \bigsqcup_{k=0}^{n} (X=k) \cap (Y=n-k)$$
donc
$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left((X=k) \cap (Y=n-k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$
par indépendance. On en déduit donc que
$$G_{X+Y}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \right) t^n.$$
Maintenant, G_X et G_Y sont deux séries entières de rayon au moins égal à 1 : par produit de Cauchy, le produit est aussi une série entière de rayon au moins 1 et
$$\begin{aligned} G_X(t)G_Y(t) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=p)t^p \sum_{q=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=q)t^q \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \mathbb{P}(X=p)\mathbb{P}(Y=q) \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \right) t^n. \end{aligned}$$
Ainsi, on a donc bien $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$. Finalement,
$$\boxed{\forall t \in]-1,1[, G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}.$$

8. Soit $t \in]-1,1[$. Par la question précédente,
$$G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$$
et par la question 6,
$$G_Z(t) = e^{-\lambda}e^{\lambda t}e^{-\mu}e^{\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)}e^{(\lambda+\mu)t} = G_A(t)$$
où A est une variable aléatoire à la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. Comme la fonction génératrice caractérise la loi, la loi de Z est celle de A donc
$$\boxed{Z \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda+\mu}.$$

Problème

Partie I - Calcul d'une intégrale

9. Soit $x > 0$. Soit $\varphi(x,t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}e^{it}$ pour $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par quotient bien défini de fonctions continues. Par ailleurs,
$$\forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(x,t)| \leq \frac{x}{x^2+t^2} = O(1/t^2)$$

et $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$ par le critère de Riemann. Ainsi, par comparaison, $\varphi(x, \cdot)$ est intégrable au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\varphi(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $g(x)$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^{+*}}.$$

10. Soit $x > 0$. Réalisons le changement de variables affine $t = ux$. Alors

$$\boxed{g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} e^{it} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+u^2x^2} e^{iux} x \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} e^{iux} \mathrm{d}u}.$$

On en déduit que

$$|g(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1+u^2} e^{iux} \right| \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u = \lim_{u \to +\infty} \arctan(u) - \lim_{u \to -\infty} \arctan(u) = \pi.$$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est bornée}}$.

11. On va appliquer le théorème de convergence dominée. Notons $\psi : (x, u) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^{iux}}{1+u^2} \in \mathbb{C}$.
    - Alors pour tout $x > 0$, $\psi(x, \cdot)$ est continue.
    - Par ailleurs,
    $$\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{x \to 0^+} \psi(x, u) = \frac{1}{1+u^2}.$$
    - **Domination** : soit $x > 0$ et $u \in \mathbb{R}$. Alors
    $$\left| \frac{e^{iux}}{1+u^2} \right| = \frac{1}{1+u^2}$$
    et $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle y est positive et son intégrale sur $\mathbb{R}$ converge (montré avant). Ainsi, ψ est dominée.

    Par le théorème de convergence dominée,
    $$\lim_{x \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixu}}{1+u^2} \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \mathrm{d}u = \pi.$$
    On a bien
    $$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = \pi}.$$

12. Appliquons le théorème de régularité $\mathcal{C}^2$ des intégrales à paramètres. Repartons de l'expression de g avec φ introduit à la question 9.
    - Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et
    $$\forall x > 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = e^{it} \frac{x^2+t^2-2x^2}{(x^2+t^2)^2} = e^{it} \frac{t^2-x^2}{(x^2+t^2)^2}$$
    ainsi que
    $$\forall x > 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = e^{it} \frac{-2x(x^2+t^2)^2 - 4x(x^2+t^2)(t^2-x^2)}{(x^2+t^2)^4}.$$
    Le numérateur se réécrit
    $$-2x(x^2+t^2)^2 - 4x(x^2+t^2)(t^2-x^2) = (t^2+x^2)(-2x^3-2xt^2-4xt^2+4x^3) = (t^2+x^2)(2x^3-6xt^2)$$
    donc
    $$\forall x > 0, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = e^{it} \frac{2x^3-6xt^2}{(x^2+t^2)^3}.$$

- Soit $x > 0$. Alors $\varphi(x, \cdot)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \cdot)$ et $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, \cdot)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- **Domination** : soit $0 < a < b$ et $t \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [a, b]$. Alors

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{b}{a^2+t^2} \; ; \; \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \underset{t^2-x^2 \leq t^2}{\leq} \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2}$$

$$\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \underset{-6xt^2<0}{\leq} \frac{2b^3}{(t^2+a^2)^3}.$$

Dans les trois cas, la fonction qui domine est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et sont dominées par $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$: elle est donc intégrable. Ainsi, toutes les dérivées sont dominées.

Par le théorème de régularité des intégrales à paramètres, g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et ce, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^{+*}, a < b$ donc $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}}$ et de surcroît,

$$\boxed{\forall x > 0, g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^3 - 6xt^2}{(x^2+t^2)^3} e^{it} \mathrm{d}t}.$$

13. Soit $x > 0$. Alors $t \mapsto \dfrac{x}{x^2+t^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = x\frac{-2t}{(x^2+t^2)^2} \; ; \; \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = x\frac{-2(x^2+t^2)^2 + 8t^2(x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^4} = \frac{6xt^2 - 2x^3}{(x^2+t^2)^3}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) = 0}$$

Ensuite, par la question 12, on a donc

$$\forall x > 0, g''(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{x}{x^2+t^2}\right) e^{it} \mathrm{d}t.$$

Fixons $x > 0$. Notons $f(t) = \dfrac{x}{x^2+t^2}$. Alors $f, \exp \in \mathcal{C}^2$ donc par double intégrations par parties,

$$\forall a < b \in \mathbb{R}, \int_a^b f''(t) e^{it} \mathrm{d}t = \left[f'(t)e^{it}\right]_a^b - \left[f(t)ie^{it}\right]_a^b - \int_a^b f(t)e^{it} \mathrm{d}t.$$

Comme f' et f sont de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$ (on a déjà calculé f' pour calculer f''), les crochets tendent vers 0 quand $a \to -\infty, b \to +\infty$. Ainsi, comme l'intégrale de gauche (ou de droite) converge, l'égalité passe à la limite en

$$-g''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{it} \mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{it} \mathrm{d}t = -g(x).$$

Ainsi, ceci étant vrai pour tout $x > 0$, $\boxed{g \text{ vérifie } y'' - y \text{ sur }]0, +\infty[}$.

14. Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle précédente est $X^2 - 1$. Ainsi, g étant solution, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}.$$

L'égalité passe à la limite quand $x \to 0^+$ en $\pi = \lambda + \mu$. Par ailleurs, si $\lambda \neq 0$, alors g diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ ce qui contredit que g est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$ (obtenu à la question 10). Ainsi, $\lambda = 0, \mu = \pi$ et

$$\boxed{\forall x > 0, g(x) = \pi e^{-x}}.$$

Partie II - Formule sommatoire de Poisson

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x+n)| = \frac{1}{1+(x+n)^2} = O(1/n^2)$$

donc par comparaison, comme $\sum n^{-2}$ converge par le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 0} f(x+n)$ converge absolument donc converge.

Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x-n)| = \frac{1}{1+(x-n)^2} = O(1/n^2)$$

donc de même, $\sum_{n\geq 1} f(x-n)$ converge absolument donc converge. Ainsi, $\boxed{F \text{ est bien définie.}}$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
F(x+1) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{N} f(x-(n-1)) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N+1} f(x+n) + \sum_{n=0}^{N-1} f(x-n) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N+1} f(x+n) + \sum_{n=1}^{N-1} f(x-n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n) + \sum_{n=1}^{+\infty} f(x-n) \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

$\boxed{F \text{ est bien 1-périodique}}$.

16. On a

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, |f(x+n)| = \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$$

et

$$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x-n)| = \frac{1}{1+(n-x)^2}\frac{1}{1+(n-1)^2}.$$

Ainsi, comme $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+n^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+(n-1)^2}$ convergent, les séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f(\cdot+n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(\cdot-n)$ convergent normalement sur $[0,1]$. Leurs séries limites sont alors continues sur $[0,1]$ par le théorème de continuité des séries de fonctions.

$\boxed{F \text{ est alors continue sur } [0,1]}$ par somme de fonctions continues et par 1-périodicité de F montré à la question précédente, $\boxed{F \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

17. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a

$$c_k(F) = \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f(t+n)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t.$$

On veut intervertir série et intégrale. Comme les séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f(\cdot+n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} f(\cdot-n)$

convergent normalement sur $[0,1]$, le théorème d'interversion série-intégrale s'applique et

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f(t-n)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t.$$

Dans la première intégrale, on réalise le changement de variable affine $u = t+n$ et dans la seconde, $u = t-n$: on a

$$c_k(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi ku} \underbrace{e^{2i\pi kn}}_{=1}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-n}^{-n+1} f(u)e^{-2i\pi ku} \underbrace{e^{2i\pi kn}}_{=1}\mathrm{d}t.$$

Enfin, par la relation de Chasles,

$$\boxed{c_k(F) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ku}\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{0} f(u)e^{-2i\pi ku}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ku}\mathrm{d}u}.$$

18. Soit $k, n \in \mathbb{Z}$. Si $k+n=0$, alors

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\mathrm{d}t = \int_0^1 1 = 1.$$

Sinon,

$$\int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{-2i\pi(n+k)}\left[e^{-2i\pi(n+k)t}\right]_0^1 = 0.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall k, n \in \mathbb{Z}, \int_0^1 e^{-2i\pi(n+k)t}\mathrm{d}t = \delta_{n,-k}}.$$

Partie III - Applications

19. On utilise l'expression trouvée à la question 17. On a

$$\boxed{c_0(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \pi}$$

(voir par exemple la réponse de la question 10). Ensuite, pour tout $k > 0$, par le résultat admis,

$$c_k(F) = c_{-k}(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi kt}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{2i\pi kt}\mathrm{d}t = g(2\pi k)$$

par la question 10. Or par la question 14, $\forall x > 0, g(x) = \pi e^{-x}$. Ainsi,

$$\boxed{c_k(F) = \pi e^{-2\pi k}}.$$

20. Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto c_n(F)e^{2in\pi x} \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto c_n(F)e^{-2in\pi x} \in \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = c_n(F) = \pi e^{-2n\pi}.$$

Ainsi, les séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$ sont des séries de fonctions continues normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ donc sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ par somme de fonctions continues sur } \mathbb{R}}.$$

Pour la périodicité, une limite simple de fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R}$ est aussi périodique : en effet, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions 1-périodiques qui converge vers f, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x+1) = f_n(x)$$

et l'égalité passe à la limite en

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x).$$

Ici, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto c_k(F)e^{2ik\pi x}$ et $x \mapsto c_k(F)e^{-2ik\pi x}$ sont 1-périodiques : on en déduit $\boxed{\text{par limite simple que } G \text{ est 1-périodique}}$.

21. On va utiliser le résultat admis. Par la question 15 et 16, F est continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique, tout comme G par la question précédente.

On reprend les notations de la question précédente. Comme $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$, par le théorème d'interversion série-intégrale,

$$\begin{aligned} c_k(G) &= \int_0^1 G(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)e^{2in\pi t}e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t + \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F)e^{-2i\pi nt}e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t \\ &\underset{Q18}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F) \underbrace{\int_0^1 e^{2in\pi t}e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t}_{=\delta_{k,n}} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(F) \underbrace{\int_0^1 e^{-2i\pi nt}e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t}_{\delta_{k,-n}} \\ &= \begin{cases} c_k(F) \text{ si } k \geq 0 \\ c_{-(-k)}(F) = c_k(F) \text{ si } k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $c_k(F) = c_k(G)$ et ce, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Par le résultat admis, $\boxed{F = G}$.

22. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)e^{2i\pi nx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(F)e^{-2i\pi nx} \\ &= -c_0(F) + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(F)\left(e^{2i\pi nx} + e^{-2i\pi nx}\right) \\ &\underset{Q19}{=} -\pi + 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n}\cos(2\pi nx). \end{aligned}$$

On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n}\sin(2\pi nx) = \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{2i\pi nx}\right)$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\pi n}e^{2i\pi nx} \underset{e^{-2\pi+2i\pi x}\neq 1}{=} \frac{1}{1-e^{-2\pi+2i\pi x}} = \frac{1-e^{-2\pi-2i\pi x}}{1+e^{-4\pi}-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)}$$

donc

$$\boxed{F(x) = G(x) = -\pi + 2\pi\frac{1-e^{-2\pi}\cos(2\pi x)}{1+e^{-4\pi}-2e^{-2\pi}\cos(2\pi x)}}$$

***

FIN DU SUJET