



Groupe Ipesup

**Optimal Sup-Spé**

# Concours commun Mines Ponts

Maths Spé – CPGE Concours 2026

## MATHÉMATIQUES 1 PC-PSI 2026

Énoncé du sujet

### Sommes d'endomorphismes de carré nul

Dans ce document, on traite le sujet MINES-PONTS PC-PSI MATHS 1 2026 en modifiant quelques fois l'énoncé pour que ce soit faisable avec le programme de Mathématiques supérieures. On sollicitera le programme de PCSI seulement. On mettra en gris l'énoncé original à modifier. Certaines questions auront une étoile : cela signifie que c'est théoriquement faisable mais c'est plutôt dans l'esprit de la deuxième année.

#### Préambule

Ce problème est consacré aux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui sont décomposables en la somme d'endomorphismes de carré nul.

Dans tout le problème, on considère uniquement des espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes et de dimension finie. Pour un tel espace vectoriel  $E$ , on note

$$\mathcal{C}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}$$

l'ensemble des endomorphismes de  $E$  de carré nul ; pour tout  $p \geq 1$ , on note

$$\Sigma_p \mathcal{C}(E) = \{u_1 + \dots + u_p \mid (u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{C}(E)^p\}$$

l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui se décomposent comme la somme de  $p$  endomorphismes de carré nul. On note enfin

$$\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \Sigma_p \mathcal{C}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui se décomposent comme la somme (d'un nombre arbitrairement grand) d'endomorphismes de carré nul.

Diverses caractérisations ont été données pour l'appartenance d'un endomorphisme de  $E$  à  $\Sigma_2 \mathcal{C}(E)$ , autrement dit pour sa décomposabilité en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Un des

objectifs de ce problème est d'étudier la situation pour d'autres tailles de décomposition, notamment les cas  $p = 3$  et  $p = 4$ .

Les cinq parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres, à l'exception de la partie E qui utilise pleinement les résultats de la partie D. Dans la partie A, on étudie la réduction des endomorphismes de carré nul. Dans la partie B, on caractérise l'appartenance à  $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$  de manière simple. Dans la partie C, on exhibe un endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul mais n'est pas somme de trois endomorphismes de carré nul. Dans la partie D, on définit les matrices de Hessenberg et quelques propriétés. Dans la partie E, on établit enfin que tout endomorphisme qui est somme d'endomorphismes de carré nul est somme de quatre endomorphismes de carré nul.

Dans le sujet, on note  $0_n$  la matrice nulle de  $M_n(\mathbb{C})$  et  $I_n$  sa matrice identité.

## A Réduction des endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n > 0$ . On se donne un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = 0$  et  $u \neq 0$ . On note  $r$  le rang de  $u$ .

- Déterminer les valeurs propres possibles pour  $u$  et en déduire que  $\text{tr}(u) = 0$ . On admet que  $\text{tr}(u) = 0$ .
- En comparant noyau et image de  $u$  pour l'inclusion, montrer que  $r \leq \frac{n}{2}$ .
- Justifier qu'il existe une famille libre  $(e_1, \dots, e_r)$  de vecteurs de  $E$  telle que  $\text{Ker}(u) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = E$ ; démontrer alors que  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une famille libre.
- En déduire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & (0) \\ I_r & 0_r & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2r} \end{pmatrix}.$$

- Montrer qu'il existe un unique entier  $m > 0$  tel que  $u$  soit représenté dans une base par la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} 0_m & 0_m & (0) \\ I_m & 0_m & (0) \\ (0) & (0) & 0_{n-2m} \end{pmatrix}.$$

## B Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

On fixe ici un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 2$ . On se propose de démontrer que  $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E)$  est égal à l'ensemble

$$\mathcal{H}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) : \text{tr}(u) = 0\}.$$

Pour  $i, j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on rappelle que  $E_{i,j}$  désigne la matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  possédant exactement un coefficient non nul, valant 1 et situé sur la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne. Pour  $i, j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose

$$F_{i,j} = E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i}.$$

- Parmi les matrices de la forme  $E_{i,j}$ , lesquelles sont de carré nul? Calculer  $(F_{i,j})^2$  pour tous  $i, j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
- On pose  $\mathcal{H}_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \text{tr}(A) = 0\}$ . Montrer que tout élément de  $\mathcal{H}_n$  est une combinaison linéaire de matrices ayant l'une des formes suivantes :
  - $E_{i,j}$  avec  $i, j$  distincts dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ;
  - $F_{i,n}$  avec  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .
- Conclure que  $\Sigma_\infty \mathcal{C}(E) = \mathcal{H}(E)$ .

Le résultat que l'on vient d'établir sera considérablement raffiné dans la partie E.

## C Somme de trois endomorphismes de carré nul

On fixe dans cette partie un espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 5$ . On a démontré dans la partie précédente que tout endomorphisme de  $E$  de trace nulle est une somme d'endomorphismes de carré nul. L'objectif est ici de mettre en évidence un endomorphisme de  $E$  qui est de trace nulle mais n'est pas la somme de trois endomorphismes de carré nul.

On admet dans cette partie (et seulement dans cette partie!) le résultat suivant :

**Théorème de Wang et Wu.** Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$ . Pour que  $u$  appartienne à  $\Sigma_2\mathcal{C}(E)$ , il faut et il suffit qu'il existe  $\varphi \in \text{GL}(E)$  tel que  $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ .

On se donne un endomorphisme  $u$  de  $E$  de trace nulle. On suppose que 1 est valeur propre de  $u$  et que le sous-espace propre associé  $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$  est de dimension  $d > \frac{3n}{4}$ .

9. Démontrer qu'il existe effectivement un endomorphisme de  $E$  vérifiant les contraintes imposées à  $u$ .
10. En développant  $(w - v)^2$ , établir que  $\text{rg}((w - v)^2) < \frac{n}{2}$ ,  
où  $w = u - \text{id}_E$  et  $v \in \mathcal{C}(E)$ .
11. En remarquant que  $\text{Ker}((w - v)^2)$  est stable par  $w - v$ , démontrer que 1 est valeur propre de  $u - v$ , de multiplicité au moins  $n - \text{rg}((w - v)^2)$ .
12. En déduire que s'il existe  $\varphi \in \text{GL}(E)$  tel que  $-(u - v) = \varphi \circ (u - v) \circ \varphi^{-1}$ , alors 1 et  $-1$  sont valeurs propres de  $u - v$  de multiplicité strictement supérieure à  $\frac{n}{2}$ .
13. Conclure que  $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$ .

## D Intermède : matrices de Hessenberg (★)

Pour cette partie (qui a largement un esprit plutôt Maths Spé que Maths sup), nous aurons besoin de l'expression du polynôme, dit polynôme caractéristique. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on note  $\chi_A$  le polynôme  $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ . C'est un polynôme de degré  $n$ . Par exemple, avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - 1 & -2 \\ -3 & X - 4 \end{vmatrix} = (X - 1)(X - 4) - 6 = X^2 - 5X - 2.$$

Enfin, si  $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  et  $C \in \mathcal{M}_{k,p}(\mathbb{C})$ , alors le déterminant de la matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  est  $\det(A)\det(B)$ .

On fixe ici un entier  $n \geq 2$ . Une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \text{M}_n(\mathbb{C})$  est dite **de Hessenberg** lorsque

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j + 1 \Rightarrow a_{i,j} = 0,$$

et on dit alors qu'une telle matrice est **régulière** lorsque

$$\forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, \quad a_{i+1,i} \neq 0.$$

Pour un vecteur  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ , on introduit la matrice par blocs

$$E_C = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & C \\ (0) & 0 \end{pmatrix} \in \text{M}_n(\mathbb{C}).$$

Pour une matrice  $B \in M_n(\mathbb{C})$  et un couple  $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $\widetilde{B}^{(k,l)}$  la sous-matrice de  $B$  obtenue en lui retirant sa  $k$ -ième ligne et sa  $l$ -ième colonne. On note enfin

$$J_n = (\delta_{i,j+1})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}),$$

une matrice dont les seuls coefficients non nuls, tous égaux à 1, sont situés immédiatement sous la diagonale. C'est bien entendu un cas particulier de matrice de Hessenberg régulière.

14. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice de Hessenberg régulière. Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un unique polynôme  $P_k \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $k - 1$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \det \left( (xI_n - A)^{\widetilde{(\cdot, n)}} \right)^{(k, n)} = P_k(x).$$

Préciser en outre le coefficient dominant de  $P_k$ . On pourra représenter  $(xI_n - A)^{\widetilde{(\cdot, n)}}$  par blocs.

15. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice de Hessenberg régulière et  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n$  et dont le coefficient sur  $X^{n-1}$  est  $-\text{tr}(A)$ . Dédurre de la question précédente qu'il existe un unique vecteur  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $A + E_C$  ait  $P$  pour polynôme caractéristique.
16. Expliciter l'unique vecteur  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $J_n + E_C$  ait  $X^n$  pour polynôme caractéristique.
17. Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . On suppose qu'il existe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est une matrice de Hessenberg régulière, et l'on fixe une telle base. Montrer que  $(u^k(e_1))_{0 \leq k \leq n-1}$  est une base de  $E$ .  
On pourra examiner la matrice de cette famille de vecteurs dans  $(e_1, \dots, e_n)$ .
18. Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice de Hessenberg régulière dont le polynôme caractéristique est  $X^n$ . Montrer que  $A$  est semblable à  $J_n$ . Montrer la question en admettant que  $A^n = 0_n$ .

## E Somme de quatre endomorphismes de carré nul

On conserve ici les notations de la partie précédente. On fixe un entier  $n \geq 2$ .

Une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$  est dite **presque triangulaire supérieure** lorsque  $a_{i,j} = 0$  pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i > j$ , sauf pour le couple  $(n, n - 1)$ , pour lequel  $a_{n, n-1} \neq 0$ .

On considère la matrice

$$V = (\delta_{i,j+1} \mathbf{1}_{i \neq n})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C}),$$

autrement dit la matrice ayant les mêmes lignes que  $J_n$ , à l'exception de la dernière ligne, qui est nulle.

19. (★) Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice presque triangulaire supérieure. On suppose que  $\text{tr}(A) = 0$ . Justifier qu'il existe  $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $A + V + E_{C_0}$  soit semblable à  $J_n$ .
20. Montrer que  $J_n$  est la somme de deux matrices de carré nul. On pourra chercher les termes  $B_1$  et  $B_2$  d'une décomposition en imposant la contrainte qu'en toute position  $(i, j)$  on ait  $(B_1)_{i,j} = 0$  ou  $(B_2)_{i,j} = 0$ .
21. Soit  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$  quelconque. Construire deux matrices  $B_1$  et  $B_2$  de  $M_n(\mathbb{C})$  telles que  $V + E_C = B_1 + B_2$  et  $(B_1)^2 = 0 = (B_2)^2$ .
22. Soit  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un plan vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  stable par  $v$  et contenant au moins un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de  $v$ . On pourra s'aider d'une base de trigonalisation.

23. En déduire que toute matrice de  $M_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} B & (?) \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

où  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in M_2(\mathbb{C})$  vérifie  $b_{2,1} \neq 0$  et où la matrice  $C \in M_{n-2}(\mathbb{C})$  est triangulaire supérieure.

24. Montrer que toute matrice de  $M_n(\mathbb{C}) \setminus \text{Vect}(I_n)$  est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure.

25. (★) On se donne un espace vectoriel  $E$  de dimension finie ainsi qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$ , supposé de trace nulle. En combinant plusieurs résultats antérieurs, démontrer que  $u \in \Sigma_4\mathcal{C}(E)$ .

**FIN DU PROBLÈME**