



Groupe Ipesup

**Optimal Sup-Spé**

# Concours commun Mines-Ponts

Maths Spé – CPGE Concours 2026

## MATHÉMATIQUES 1 PC-PSI 2026

Corrigé du sujet

### Contenu

Après une présentation du sujet, on présente un corrigé détaillé pour les étudiants qui veulent travailler cette annale. Le corrigé est agrémenté de petits encadrés qui rappellent quels chapitres sont sollicités à chaque question.

Un index se trouve en fin de document afin de s'y repérer convenablement. En rouge, les thématiques de Spé et en orange, les thématiques de Sup.

### Préambule

- Ce sujet du concours Mines-Ponts contient un problème à 5 parties.
- La première partie est une partie assez standard d'une difficulté assez modérée. Elle devrait ne pas poser trop de problème.
- Pour la deuxième partie, on rappelle un résultat très classique sur l'hyperplan  $\text{tr}^{-1}(\{0\})$  pour conclure. La partie est aussi assez accessible.
- La partie *C* contient déjà des difficultés considérables. La question 10 et 11 vont en perturber plus d'un et peut provoquer un blocage considérable pour la plupart des candidats. A ce moment-là, il est recommandé de passer assez vite car, heureusement et malheureusement, le sujet est assez long.
- Pour la partie *D*, elle est très calculatoire et il ne faut pas se perdre dans les calculs. Bien comprendre les matrices de Hessenberg est primordial pour la partie *E* donc il valait mieux se concentrer à faire cette partie plutôt que de s'aventurer considérablement dans la partie *E*.
- Enfin, cette dernière partie, sauf quelques questions, est très dure, surtout avec le programme de PC-PSI en réduction. Cette partie est décomposée en 3 parties : question 19, 20 – 21 et 22 – 23 – 24. La question 19 est accessible. Les questions 20 – 21 demandaient de l'imagination pour trouver les matrices  $B_1$  et  $B_2$  et le bloc de question 22 – 23 – 24 est d'un niveau conceptuel

et technique assez élevé. On pouvait les passer pour traiter la dernière question mais ce n'est pas très intéressant. Cette dernière partie ne devrait être abordée que lorsque les parties A à D l'étaient considérablement.

- Le sujet est très long! 25 questions, pas forcément triviales en 3h. Le candidat admissible a dû s'en sortir sur les parties A et B mais devant la difficulté des parties suivantes, il sera difficile de prédire la qualité des copies.

## A. Réduction des endomorphismes de carré nul

1. Comme  $X^2$  annule  $u$ , le spectre de  $u$  est inclus dans  $\{0\}$ . Comme  $u$  est trigonalisable (on travaille dans  $\mathbb{C}$ ), le spectre de  $u$  est non vide : on en déduit que

$$\text{Sp}(u) = \{0\}.$$

Chap. :  
• Red

Par ailleurs, encore parce que  $u$  est trigonalisable, la trace de  $u$  vaut la somme des valeurs propres donc ici,

$$\text{tr}(u) = 0.$$

2. Comme  $u^2 = 0$ ,  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ . En effet, si  $y \in \text{Im}(u)$ , il existe  $x \in E$  tel que  $u(x) = y$  et  $0 = u^2(x) = u(y)$  donc  $y \in \ker(u)$ .

L'inclusion  $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$  passe à la dimension en

$$\text{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)) = n - \text{rg}(u)$$

par le théorème du rang. Ainsi, avec  $r = \text{rg}(u)$ ,

$$r \leq \frac{n}{2}.$$

Chap. :  
• Red  
• App Lin

3.  $\ker(u)$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n - r$  de  $E$  de dimension  $n$  : il existe donc un supplémentaire  $S$  du noyau dans  $E$  de dimension  $n - (n - r) = r$ . Soit donc  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $S$ . On a alors

$$\ker(u) \oplus \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = E.$$

Chap. :  
• Red  
• App Lin

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une famille de scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i u(e_i) = 0.$$

Alors

$$0 = u \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \right)$$

donc

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \in S \cap \ker(u) = \{0\}$$

puisque  $S$  et  $\ker(u)$  sont en somme directe. On en déduit que  $\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i = 0$  et par liberté des  $(e_1, \dots, e_r)$  (puisque c'est une base), on en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

Ainsi, la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_r))$  est une famille libre.



5. Pour l'existence, la question précédente montre que  $m = r$  convient. Pour l'unicité, si un tel  $m$  existe, alors on remarque que

$$\text{rg} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0_r & 0_r & 0_{m,n-2m} \\ I_m & 0_r & 0_{m,n-2m} \\ 0_{n-2m,m} & 0_{n-2m,m} & 0_{n-2m} \end{pmatrix}}_{=:M} \right) = m$$

puisque l'espace engendré par ses colonnes est l'espace engendré par ses  $m$  premières colonnes, à savoir  $e_{m+1}, \dots, e_{2m}$  et on a  $\dim(\text{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_{2m})) = m$ . Ainsi, comme  $\text{rg}(u) = \text{rg}(M)$ , on a  $r = m$ .

Ainsi, le seul entier  $m > 0$  tel que  $u$  soit représentée de la forme souhaitée est l'entier  $r = \text{rg}(u)$ .

Chap. :

• Mat App

Lin

## B. Somme d'un nombre arbitraire d'endomorphismes de carré nul

6. On rappelle la formule

$$\forall i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}.$$

En particulier, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{i,j}^2 = \delta_{i,j}E_{i,j}$  donc

$$\boxed{\text{il faut et suffit d'avoir } i \neq j \text{ pour avoir } E_{i,j}^2 = 0_n}.$$

Soit maintenant  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j$ . Alors on obtient 0 si on multiplie

- $E_{i,i}$  par  $E_{j,j}$  et  $E_{j,i}$
- $E_{j,j}$  par  $E_{i,i}$  et  $E_{i,j}$
- $E_{i,j}$  par  $E_{i,i}$  et  $E_{i,j}$
- $E_{j,i}$  par  $E_{j,j}$  et  $E_{j,i}$

donc

$$\begin{aligned} F_{i,j}^2 &= (E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} - E_{j,i})^2 \\ &= (E_{i,i} + E_{i,j}) + (E_{j,j} + E_{j,i}) + (-E_{i,j} - E_{i,i}) + (-E_{j,i} - E_{j,j}) \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, F_{i,j}^2 = 0_n}.$$

7. Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j$ . Alors  $\text{tr}(E_{i,j}) = 0$ . Par ailleurs,

$$\text{tr}(F_{i,n}) = 1 - 1 + 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, les  $(E_{i,j})_{i \neq j}$  et les  $(F_{i,n})_{1 \leq i \leq n-1}$  sont dans l'hyperplan  $\mathcal{H}_n$  (noyau de la forme linéaire  $\text{tr}$ ). Montrons que cette famille forment une base.

- Déjà, la liberté. Soit  $(\lambda_{i,j})_{i \neq j}$  et  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de scalaires vérifiant

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i F_{i,n} = 0. \tag{2}$$

Alors

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (E_{i,i} - E_{n,n} + E_{i,n} - E_{n,i}) = 0$$

Chap. :

• Matrices

Chap. :

•  $\dim < \infty$

ce qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_i E_{i,i} - \left( \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \right) E_{n,n} + A = 0.$$

où  $A \in \text{Vect}(E_{i,j} : i \neq j)$ . Comme les  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  forment une famille libre, par liberté,

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mu_i = 0$$

donc dans (2), on a

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0.$$

De même, par la même liberté,

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, \lambda_{i,j} = 0.$$

Ainsi, on a la liberté souhaitée.

- Comme  $\text{tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{H}_n = \ker(\text{tr})$  est de dimension  $n^2 - 1$ . Or, le cardinal de la famille qu'on vient de considérer est

$$\text{Card}((i, j) : i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j) + n - 1 = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$$

donc par cardinalité, c'est une base de  $\mathcal{H}_n$ .

Ainsi,

$$\mathcal{H}_n = \text{Vect}\left( (E_{i,j} : i \neq j), (F_{i,n} : 1 \leq i \leq n-1) \right).$$

8. Remarquons que dans la base trouvée à la question précédente, la question 6 assure que chaque élément est de carré nul. Remarquons aussi que si  $A$  est de carré nul,  $\lambda A$  l'est aussi pour tout scalaire  $\lambda$ .

Procédons par double inclusion.

- Soit  $u \in \mathcal{H}(E)$ . Soit  $A$  sa matrice canoniquement associée (on note  $\mathcal{B}$  la base associée). Alors  $A \in \mathcal{H}_n$  donc  $A$  s'écrit comme somme de matrices de carré nul, disons  $A_1, \dots, A_k$ . En notant  $u_i$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i) = A_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ , on a

$$u = \sum_{i=1}^k u_i$$

et chaque  $u_i$  est de carré nul :  $u \in \Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E)$ .

- Réciproquement, soit  $u \in \Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $u_1, \dots, u_k$  des endomorphismes de carré nul tel que

$$u = \sum_{i=1}^k u_i.$$

Alors  $u_i^2 = 0$  donc ou bien  $u_i = 0$  et  $\text{tr}(u_i) = 0$ , ou bien  $u_i \neq 0$  et par la question 1,  $\text{tr}(u_i) = 0$ .

Ainsi,  $u$  est somme d'éléments de  $\mathcal{H}(E)$  donc comme ce dernier est un espace vectoriel,

$$u \text{ est aussi élément de } \mathcal{H}(E).$$

Ainsi, par double inclusion,

$$\mathcal{H}(E) = \Sigma_{\infty} \mathcal{C}(E).$$

Chap. :  
• Mat App  
Lin

### C. Somme de trois endomorphismes de carré nul

9. Déjà, comme  $n \geq 5$ , on a  $n - 1 \geq \frac{3n}{4}$  : en effet, on a  $4n - 4 \geq 3n \iff n \geq 4$ . Ainsi,  $\left] \frac{3n}{4}, n - 1 \right] \cap \mathbb{N}$  contient au moins  $n - 1$  donc est non vide.

Chap. :  
• Red

Considérons donc une matrice diagonale contenant

- $d \in \left] \frac{3n}{4}, n - 1 \right] \cap \mathbb{N}$  fois le nombre 1,
- une fois le nombre  $-d$ ,
- puis  $n - (d + 1)$  fois le nombre 0.

Comme  $d \in \left] \frac{3n}{4}, n - 1 \right] \cap \mathbb{N}$ ,  $n - (d + 1) \in \llbracket 0, n \rrbracket$  donc une telle matrice existe. Ainsi, 1 est valeur propre de multiplicité géométrique exactement  $d$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  telle que dans cette base, elle soit représentée par cette matrice diagonale.

Alors

par construction, on a  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim(\ker(u - \text{Id})) = d$  avec la contrainte  $d > \frac{3n}{4} \geq 1$ .

10. On a  $(w - v)^2 = w^2 + v^2 - wv - vw = w^2 - wv - vw = w(w - v) - vw$ . On rappelle que pour tout  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{rg}(uv) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$ .

Par ailleurs, on a l'inclusion  $\text{Im}(u + v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$  donc

Chap. :  
•  $\dim < \infty$

$$\text{rg}(u + v) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \stackrel{(\star)}{\leq} \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$$

( $\star$ ) par la formule de Grassmann,  $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) \leq \dim(E) + \dim(F)$ .

Ainsi,

$$(w - v)^2(E) = w(w - v)(E) - vw(E) \subset \text{Im}(w) + \text{Im}(vw).$$

En particulier,

$$\text{rg}((w - v)^2) \leq \text{rg}(w) + \text{rg}(vw) \leq \text{rg}(w) + \text{rg}(w) = 2\text{rg}(w).$$

Comme  $\dim(\ker(w)) = d > \frac{3n}{4}$  par hypothèse, par le théorème du rang,

$$\text{rg}(w) < n - \frac{3n}{4} = \frac{n}{4}$$

et donc

$$\text{rg}((w - v)^2) < \frac{n}{2}.$$

11. Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ ,  $\ker(u^2)$  est stable par  $u$  : en effet,  $\forall x \in \ker(u^2)$ ,  $u^2(u(x)) = u(u^2(x)) = u(0) = 0$  donc  $u(\ker(u^2)) \subset \ker(u^2)$ .

Ainsi,  $w - v$  stabilise  $\ker((w - v)^2)$ .

Chap. :  
• Red

*L'énoncé n'est pas clair : on ne sait pas si c'est la multiplicité algébrique ou géométrique qu'il faut chercher. On va supposer que c'est l'algébrique.*

Notons  $f = w - v$ . Comme  $f$  stabilise  $\ker(f^2) =: F$ , on peut considérer l'induit de  $f$  sur  $F$  noté  $f_F$ .

Alors  $\forall x \in F, (f_F)^2(x) = f^2(x) = 0$  puisque  $F = \ker(f^2)$ . Ainsi,  $f_F$  est de carré nul donc par la question 1, son spectre est réduit à 0 donc  $\chi_{f_F} = X^{\dim(F)}$ .

Maintenant, comme  $\chi_{f_F} \mid \chi_f$ , on en déduit que la multiplicité algébrique de 0 pour  $f$ , notée  $m$ , vérifie

$$m \geq \dim(F) = \dim(\ker(f^2)) = n - \text{rg}(f^2)$$

par le théorème du rang. Ainsi,

1 est valeur propre de  $u - v$  (i.e. 0 est valeur propre de  $w - v$ )  
de multiplicité algébrique au moins  $n - \text{rg}((w - v)^2)$ .

12. Notons  $m_\lambda$  la multiplicité algébrique de  $\lambda$  pour  $u - v$ . Déjà, par la question 10, on a  $\text{rg}((w - v)^2) < \frac{n}{2}$ . Ainsi, 1 est valeur propre de  $u - v$  avec  $m_1 > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$ .

Chap. :  
• Red

Si un tel  $\varphi$  existe, alors  $u - v$  et  $-(u - v)$  sont semblables. On en déduit qu'ils ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités algébriques. En particulier, comme 1 est valeur propre de  $u - v$  de multiplicité  $m_1$ , 1 est aussi valeur propre de  $-(u - v)$  de multiplicité  $m_1$  i.e.  $-1$  est valeur propre de  $u - v$  de multiplicité  $m_1$ .

Ainsi, on a les multiplicités de 1 (resp.  $-1$ ) de  $u - v$  notées  $m_1$  (resp.  $m_{-1}$ ) qui vérifient

$$m_1, m_{-1} > \frac{n}{2}$$

13. Supposons par l'absurde que  $u \in \Sigma_3\mathcal{C}(E)$ .  $u$  s'écrit  $u_1 + u_2 + v$  où  $u_1, u_2, v \in \mathcal{C}(E)$ . Alors  $u - v \in \Sigma_2\mathcal{C}(E)$  donc par le théorème de Wang et Wu, il existe  $\varphi \in \text{GL}(E)$  tel que  $-(u - v) = \varphi \circ (u - v) \circ \varphi^{-1}$ . Par la question 12, avec les notations de la question précédente, on a  $m_1 > \frac{n}{2}$  et  $m_{-1} > \frac{n}{2}$ .

Chap. :  
• Red

On sait par le cours que la somme des multiplicités algébriques vaut exactement la dimension de  $E$ , c'est-à-dire  $n$ . En particulier, on a  $m_1 + m_{-1} \leq n$ .

Or  $m_1 + m_{-1} = 2m_1 > 2 \cdot \frac{n}{2} = n$  ce qui fournit une contradiction. Ainsi,  $u \notin \Sigma_3\mathcal{C}(E)$ .

## D. Intermède : matrices de Hessenberg

Mis à part la notion de polynôme caractéristique, cette partie est théoriquement faisable avec le programme de PCSI.

14. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $x \in \mathbb{C}$ . Alors  $xI_n - A$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} xI_{k-1} - A_1 & * & * & * \\ * & x + a & * & * \\ 0_{n-k-1, k-1} & C_1 & xI_{n-k-1} - A_2 & * \\ 0_{1, k-1} & 0 & L_1 & x + b \end{pmatrix}$$

Chap. :  
• det  
• Pol

où

- $A_1$  est une matrice (de Hessenberg) de  $\mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{C})$
- $A_2$  est une matrice de Hessenberg de  $\mathcal{M}_{n-k-1}(\mathbb{C})$
- $C_1$  est une matrice colonne contenant que des zéros sauf en première coordonnée

- $L_1$  est une ligne contenant que des zéros sauf en dernière coordonnée.

En retirant la ligne rouge  $k$  et la colonne  $n$  bleue, on a

$$\widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)} = \begin{pmatrix} xI_{k-1} - A_1 & * & * \\ 0_{n-k-1,k-1} & C_1 & xI_{n-k-1} - A_2 \\ 0_{1,k-1} & 0 & L_1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\det \left( \widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)} \right) = \det(xI_{k-1} - A_1) \begin{vmatrix} C_1 & xI_{n-k-1} - A_2 \\ 0 & L_1 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant à droite est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont  $([C_1]_1, [A_2]_{2,1}, [A_2]_{3,2}, \dots, [A_2]_{n-k-1, n-k-2}, [L_1]_{n-k})$ . En particulier, son déterminant est une constante non nulle (tous les coefficients de cette diagonale est non nulle par hypothèse,  $A$  étant de Hessenberg régulière) indépendante de  $x$  : notons-là  $c$ . On calcule  $c$  ci-après et montre que  $c$  est bien non nul.

On a donc

$$\det \left( \widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)} \right) = c\chi_{A_1}(x).$$

Comme  $\chi_{A_1}$  est un polynôme de degré  $k-1$ , on a bien existence d'un polynôme  $P_k$  de degré  $k-1$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{C}, \det \left( \widetilde{(xI_n - A)}^{(k,n)} \right) = P_k(x).$$

Pour l'unicité, soit un tel polynôme  $P_k$  de degré  $k-1$ . Alors ce polynôme égale  $c\chi_{A_1}$  sur  $\mathbb{C}$  : deux polynômes de degré  $k-1$  qui s'égalent au moins  $k$  points sont égaux donc  $P_k = c\chi_{A_1}$  et on a l'unicité souhaitée.

En ce qui concerne le coefficient dominant, c'est le nombre  $c$  que l'on cherche : si on suit les notations précédentes, ce nombre  $c$  vaut le produit des coefficients la sous-diagonale à partir de la ligne  $k+1$  **avec un signe  $-$**  : on a donc comme coefficient dominant de  $P_k$  :

$$c = (-1)^{n-k} \prod_{i=k+1}^n [A]_{i,i-1}$$

Par hypothèse, c'est un produit de coefficient non nuls.

15. Soit  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$ . Alors  $A + E_C$  est aussi une matrice de Hessenberg régulière donc l'expression

$$\det \left( \widetilde{(xI_n - A - E_C)}^{(k,n)} \right)$$

est une expression polynomiale de degré  $k-1$  par la question précédente.

Calculons  $\chi_{A+E_C}$ . Soit  $x \in \mathbb{C}$ . En développant par rapport à la dernière colonne,

$$\begin{aligned} \chi_{A+E_C}(x) &= \det(xI_n - A - E_C) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} ([A]_{j,n} + [C]_j) \Delta_{j,n}(x) + (x - [A]_{n,n}) \Delta_{n,n}(x) \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} [A]_{j,n} \Delta_{j,n}(x) + (x - [A]_{n,n}) \Delta_{n,n}(x)}_{=\chi_A(x)} + \sum_{j=1}^{n-1} [C]_j (-1)^{j+n} \Delta_{j,n}(x) \end{aligned}$$

**Chap. :**  
• det  
• E.V.

Le coefficient  $\Delta_{j,n}(x)$  vaut exactement  $\det((xI_n - \widetilde{A} - E_C)^{(j,n)})$  donc est une expression polynomiale de degré  $j - 1$ . Ainsi, la famille  $\left( (-1)^{j+n} \Delta_{j,n}(X) \right)_{1 \leq j \leq n-1}$  est une famille échelonnée en degré dans  $\mathbb{C}_{n-2}[X]$  de cardinal  $n - 1 = \dim(\mathbb{C}_{n-2}[X])$ . Par cardinalité, c'est une base.

Soit  $Q(X) = P(X) - \chi_A(X)$ . Par hypothèse, comme  $\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots$ ,  $Q$  est de degré au plus  $n - 2$  : il existe alors un unique vecteur  $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{n-1} c_j (-1)^{j+n} \Delta_{j,n}.$$

Ainsi, il existe un unique vecteur  $C \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que

$$Q(X) = \sum_{j=1}^{n-1} [C]_j (-1)^{j+n} \Delta_{j,n}$$

*i.e.*

$$P(X) = \chi_A(X) + \sum_{j=1}^{n-1} [C]_j (-1)^{j+n} \Delta_{j,n} = \chi_{A+E_C}(X)$$

16. Considérons  $C$  le vecteur nul. Alors  $J_n + E_C = J_n$  et  $\chi_{J_n} = X^n$  puisque  $J_n$  est triangulaire inférieure avec que des 0 sur la diagonale :

Avec  $C = 0$ , on a  $\chi_{J_n+E_C} = X^n$ . L'unicité de  $C$  provient de la question précédente.

17. Soit  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . Par hypothèse, au vu de la représentation matricielle de  $u$ , le fait qu'elle soit de Hessenberg donne  $u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$  et qu'elle est régulière donne que  $u(e_k)$  a une composante non nulle selon  $e_{k+1}$  donc n'est pas dans  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

On en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ ,

$$u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,

$$u^k(e_1) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Soit maintenant  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u^i(e_1) = 0$$

Soit  $I = \{i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket : \lambda_i \neq 0\}$ . Supposons par l'absurde que  $I$  est vide. Alors comme  $I$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  majorée par  $n - 1$ ,  $I$  admet un plus grand élément noté  $i_0$ . On a donc

$$0 = \sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i u^i(e_1) = \sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i u^i(e_1) + \lambda_{i_0} u^{i_0}(e_1).$$

On sait que

$$\sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i u^i(e_1) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0})$$

**Chap. :**  
 • Mat App  
 Lin  
 • E.V.

et

$$\lambda_{i_0} u^{i_0}(e_1) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0+1}) \setminus \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0})$$

puisque  $\lambda_{i_0} \neq 0$ . La somme de deux tels vecteurs ne peut être nul donc on obtient une contradiction.

Ainsi,  $I$  est vide et tous les  $\lambda_i$  sont nuls :

la famille  $(u^i(e_1))_{0 \leq i \leq n-1}$  est libre dans  $E$  donc est une base de  $E$  par cardinalité.

18. Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $A$  et soit  $e_1$  le premier vecteur de cette base. Par la question précédente, la famille  $\mathcal{B} := (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$  est une base de  $E$ .

Alors par définition, comme  $u^n(e_1) = 0$  (par Cayley-Hamilton,  $X^n(u) = u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ),

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_n.$$

Ainsi,  $J_n$  et  $A$  représentent le même endomorphismes dans deux bases différentes : ainsi,

$A$  et  $J_n$  sont semblables.

**Chap. :**  
• Mat App  
Lin

## E. Somme de quatre endomorphismes de carré nul

19. On veut utiliser les questions 15 et 18.

- On a  $\text{tr}(A + V) = 0$  donc  $X^n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$  dont le coefficient en  $X^{n-1}$  est  $0 = -\text{tr}(A + V)$ .
- Soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $[A + V]_{i,j} = [A]_{i,j} + [V]_{i,j}$ . Cette quantité vaut 0 lorsque  $i > j + 1$ . Par ailleurs,
  - pour tout  $i \in \llbracket 1, n - 2 \rrbracket$ , on a  $[A]_{i+1,i} = 0$  (car  $A$  est presque triangulaire supérieure) et  $[V]_{i+1,i} = 1$ .
  - pour  $i = n - 1$ ,  $[A]_{i+1,i} \neq 0$  mais  $[V]_{i+1,i} = 0$ .

Ainsi,  $[A + V]_{i+1,i}$  est non nul pour tout  $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

On en déduit que  $A + V$  est une matrice de Hessenberg régulière.

- Par la question 15, il existe un unique vecteur  $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $A + V + E_{C_0}$  a pour polynôme caractéristique  $X^n$ .
- Comme  $A + V$  est une matrice de Hessenberg régulière et  $E_{C_0}$  est un vecteur ne changeant que la dernière colonne,  $A + V + E_{C_0}$  est une matrice de Hessenberg régulière. Par la question 18,

$A + V + E_{C_0}$  est semblable à  $J_n$ .

**Chap. :**  
• Matrices

20. On note  $B_1$  la matrice valant 1 en  $(i, i - 1)$  pour  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  si  $i$  est impair et 0 sinon, la même chose pour  $B_2$  mais cette fois-ci pour  $i$  pair.

Par construction, on a  $B_1 + B_2 = J_n$ . Montrons que  $B_1^2 = B_2^2 = 0_n$ . Pour cela, soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a

$$[(B_1)^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [B_1]_{i,k} [B_1]_{k,j}.$$

- Si  $i = 1$ ,  $[B_1]_{i,k}$  vaut 0 pour tout  $k$  donc  $[(B_1)^2]_{i,j} = 0$ .

**Chap. :**  
• Matrices

- Sinon,

$$[(B_1)^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [B_1]_{i,k} [B_1]_{k,j} = [B_1]_{i,i-1} [B_1]_{i-1,j}.$$

Si  $[B_1]_{i,i-1}$  est non nul, alors  $i$  est impair par hypothèse. En particulier,  $i - 1$  est pair.

- Par ailleurs,  $[B_1]_{i-1,j}$  est non nul si, et seulement si  $j = i - 2$  et  $i - 1$  est impair. Par contraposée,  $[B_1]_{i-1,j} = 0$ .

On a bien  $B_1^2 = 0_n$ . Par un raisonnement analogue,  $B_2^2 = 0_n$ .

On a bien écrit  $J_n$  comme somme de deux matrices de carré nul.

21. On note  $B_1$  la matrice valant 1 en  $(i, i - 1)$  pour  $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$  si  $i$  est pair, valant  $C_j$  en  $(j, n)$  si  $j$  est pair et 0 sinon.

On note  $B_2$  la matrice valant 1 en  $(i, i - 1)$  pour  $i \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$  si  $i$  est impair, valant  $C_j$  en  $(j, n)$  si  $j$  est impair et 0 sinon.

Par construction,  $V + E_C = B_1 + B_2$ . Montrons que  $B_1^2 = B_2^2 = 0_n$ . Pour cela, soit  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a

$$[(B_1)^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [B_1]_{i,k} [B_1]_{k,j}.$$

- Si  $i = 1$ ,  $[B_1]_{i,k}$  vaut 0 pour tout  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  et vaut  $[B_1]_{i,k} = C_i$  pour  $k = n$ . Ainsi,

$$[(B_1)^2]_{1,j} = C_1 [B_1]_{n,j}.$$

La dernière ligne de  $B_1$  est nulle donc  $[B_1]_{n,j} = 0$  et  $[(B_1)^2]_{1,j} = 0$ .

- Sinon,

$$[(B_1)^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [B_1]_{i,k} [B_1]_{k,j} = [B_1]_{i,i-1} [B_1]_{i-1,j} + [B_1]_{i,n} [B_1]_{n,j}.$$

$B_1$  a toujours sa dernière ligne nulle donc le deuxième terme de la somme de droite est nulle. Pour le premier terme, si  $i$  est impair, on obtient 0. Sinon,

- si  $j \neq n$ , alors  $[B_1]_{i-1,j}$  est non nul si, et seulement si,  $j = i - 2$  et  $i - 1$  est pair donc par contraposée,  $[B_1]_{i-1,j} = 0$ .
- sinon,  $j = n$  et  $[B_1]_{i-1,j}$  est nul si, et seulement si,  $i - 1$  est pair donc  $[B_1]_{i-1,j} = 0$ .

Ainsi,  $[(B_1)^2]_{i,j} = 0$  donc  $B_1^2 = 0$ .

De même, on a  $B_2^2 = 0$ . On a bien

$$V + E_C = B_1 + B_2 ; B_1^2 = B_2^2 = 0.$$

22. Soit  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  qui n'est pas une homothétie.

- Si  $v$  admet deux valeurs propres distinctes, disons  $\lambda$  et  $\mu$ , soit  $x$  et  $y$  vecteurs propres respectifs. Supposons que  $x + y$  est un vecteur propre de  $v$ , disons de valeur propre  $\alpha$ . On a

$$v(x + y) = v(x) + v(y) = \lambda x + \mu y = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$$

Or la famille  $(x, y)$  est libre puisque ce sont des vecteurs propres de  $v$  associées à des valeurs propres distinctes : on peut donc identifier les coefficients et avoir  $\lambda = \alpha = \mu$  ce qui est absurde.

Ainsi,  $(x, x + y)$  est un plan stable ( $v(x) = \lambda x \in \mathcal{P}, v(x + y) = \lambda x + \mu y \in \mathcal{P}$ ) et  $x + y$  n'est pas un vecteur propre ce qui conclut.

Chap. :  
• Matrices

Chap. :  
• Red

- Si  $v$  n'a qu'une seule valeur propre, disons  $\lambda$ , considérons une base de trigonalisation  $(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket : e_i \in \mathcal{E}_\lambda(v)\}$ .

Alors  $I$  contient 1,  $I$  est majorée donc  $I$  admet un plus grand élément, disons  $i_0$ . Si  $i_0 = n$ , alors tous les  $(e_1, \dots, e_n)$  sont des vecteurs propres de  $v$  donc on obtient une base de diagonalisation de  $v$  :  $v$  est alors représentée dans cette base par  $\lambda I_n$  donc  $v = \lambda \text{Id}$  ce qui est absurde.

Ainsi,  $i_0 < n$  et  $e_{i_0+1} \notin \mathcal{E}_\lambda(v)$ . Par hypothèse,  $v(e_{i_0+1}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_0+1})$ . Notons  $y = e_{i_0+1}$ . Alors  $v(y)$  s'écrit  $\sum_{k=1}^{i_0} \mu_k e_k + \lambda e_{i_0+1}$  donc

$$v^2(y) = \sum_{k=1}^{i_0} \mu_k v(e_k) + \alpha v(y) = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{i_0} \mu_k e_k}_{=v(y)-\lambda y} + \lambda v(y) = \lambda v(y) = 2\lambda v(y) - \lambda y.$$

Par ailleurs,  $y$  n'est pas un vecteur propre de  $v$  (puisque  $\lambda$  est la seule valeur propre possible et  $y \notin \mathcal{E}_\lambda(v)$ ) donc  $(y, v(y))$  est un plan stable contenant un vecteur non nul non vecteur propre de  $v$ .

Par disjonction de cas,

il existe un plan vectoriel de  $\mathbb{C}^n$  stable par  $v$  ayant un vecteur non nul non vecteur propre de  $v$ .

23. Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui n'est pas une homothétie. Soit  $v$  endomorphisme canoniquement associée à  $M$ . Alors  $v$  n'est pas une homothétie donc il existe un plan stable  $(e_1, e_2)$  où  $e_1$  n'est pas un vecteur propre de  $v$  par la question précédente.

Chap. :  
• Red

Par le théorème de la base incomplète, il existe  $(e_3, \dots, e_n)$  tel que  $(e_1, \dots, e_n)$  soit une base. Il existe alors une matrice  $L \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{C})$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{C})$  et  $P = (e_1 \mid \dots \mid e_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$M = P \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & L \\ (0) & A \end{pmatrix} P^{-1}$$

où  $c$  est non nul car sinon,  $u(e_1) = ae_1$  donc  $e_1$  serait un vecteur propre.  $A$  est trigonalisable : soit  $Q \in \text{GL}_{n-2}(\mathbb{C})$  et  $T \in \mathcal{T}_{n-2}^+(\mathbb{C})$  telles que

$$A = QTQ^{-1}.$$

Soit  $R = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$  d'inverse  $R^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ .

Alors

$$R \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & LQ \\ (0) & T \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & L \\ (0) & QTQ^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & L \\ (0) & A \end{pmatrix}$$

donc en multipliant par  $P$  à gauche et  $P^{-1}$  à droite, on a

$$(PR) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & LQ \\ (0) & T \end{pmatrix} (PR)^{-1} = M.$$

$M$  est donc semblable à  $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & LQ \\ (0) & C \end{pmatrix}$  où  $C$  est une matrice triangulaire supérieure avec  $c \neq 0$ .

**Chap. :**  
• Red

24. Soit  $A$  une matrice qui n'est pas une homothétie. Alors  $A^T$  n'est pas non plus une homothétie. Par la question précédente, il existe  $C \in \mathcal{T}_{n-2}^+(\mathbb{C}), L \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $A^T$  soit semblable à

$$\begin{pmatrix} B & L \\ 0 & C \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}; b_{2,1} \neq 0.$$

Ainsi,  $A$  donc semblable à  $\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ L^T & C^T \end{pmatrix}$ .

Soit maintenant  $u$  l'endomorphisme canoniquement associée à  $A$  et  $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$  base dans laquelle  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est  $\begin{pmatrix} B^T & 0 \\ L^T & C^T \end{pmatrix}$ .

Considérons donc  $\mathcal{C} = (e_n, \dots, e_3, e_2, e_1)$ . Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \tilde{C} & \tilde{L} \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{L} \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{C}), \tilde{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et  $\tilde{C}$  est une matrice triangulaire supérieure : cela vient du fait que comme  $C^T$  est triangulaire inférieure,

$$\forall i \in \llbracket 3, n \rrbracket, u(e_i) \in \text{Vect}(e_i, \dots, e_n)$$

*i.e.*

$$\forall i \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket, u(e_{n-i}) \in \text{Vect}(e_n, \dots, e_{n-i})$$

*i.e.*  $\tilde{C}$  est triangulaire supérieure.

On a

$$u(e_1) \in b_{1,1}e_1 + b_{1,2}e_2 + \text{Vect}(e_3, \dots, e_n); u(e_2) \in b_{2,1}e_1 + b_{2,2}e_2 + \text{Vect}(e_3, \dots, e_n)$$

donc dans une base bien choisie,  $u$  est représentée par  $\begin{pmatrix} \tilde{C} & \tilde{L} \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$ .  $\tilde{B}_{2,1}$  est le coefficient selon  $e_1$  de  $u(e_2)$ , à savoir  $b_{2,1} \neq 0$ . Puisque  $A$  est la matrice dans la base canonique de  $u$ ,

$A$  et  $\begin{pmatrix} \tilde{C} & \tilde{L} \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$  sont semblables avec  $[\tilde{B}]_{2,1} \neq 0$  et  $\tilde{C}$  triangulaire supérieure.

25. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  de trace nulle. Si  $u$  est une homothétie, disons  $\lambda \text{Id}$ , on a  $\text{tr}(u) = \lambda n$  donc  $\lambda = 0$  et  $u = 0 \in \Sigma_4 \mathcal{C}(E)$ .

Supposons donc que  $u$  n'est pas une homothétie. Soit  $M$  matrice canoniquement associée à  $u$ . Alors  $M$  n'est pas une homothétie donc par la question 24,  $M$  est semblable à une matrice presque triangulaire supérieure, notée  $A$ .

Par la question 19, il existe  $C_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $A + V + E_{C_0}$  soit semblable à  $J_n$  : soit donc  $P$  une matrice de passage qui convient.

Par la question 20, il existe  $B_1, B_2$  de carré nul telles que  $J_n = B_1 + B_2$  : on a donc

$$A + V + E_{C_0} = P J_n P^{-1} = P B_1 P^{-1} + P B_2 P^{-1} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2.$$

Comme  $B_1^2 = B_2^2 = 0_n$ , on a  $\widehat{B}_1^2 = \widehat{B}_2^2 = 0$ .

Par la question 21, il existe  $B_3, B_4$  deux matrices de carré nul telles que  $V + E_{C_0} = B_3 + B_4$ .  
On en déduit que

$$A = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 - B_3 - B_4.$$

Comme  $(-B_3)^2 = B_3^2 = (-B_4)^2 = B_4^2 = 0$ ,  $A$  s'écrit comme somme de 4 matrices de carré nul.

Concluons. Soit  $u_1, u_2, u_3, u_4$  endomorphismes de  $E$  canoniquement associés aux matrices  $\widehat{B}_1, \widehat{B}_2, -B_3, -B_4$ . Alors par construction,

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

avec  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathcal{C}(E) : u \in \Sigma_4 \mathcal{C}(E)$ .

\*\*\*

**FIN DU SUJET**

## Index des chapitres

### Calcul matriciel (• Matrices)

- Q. 19, page 10
- Q. 20, page 10
- Q. 21, page 11
- Q. 6, page 4

### Déterminants (• det)

- Q. 14, page 7
- Q. 15, page 8

### Applications linéaires (• App Lin)

- Q. 2, page 2
- Q. 3, page 2

### Dimension finie (• $\dim < \infty$ )

- Q. 10, page 6
- Q. 7, page 4

### Espaces vectoriels (• E.V.)

- Q. 15, page 8
- Q. 17, page 9

### Polynômes (• Pol)

- Q. 14, page 7

### Représentation matricielle en algèbre linéaire (• Mat App Lin)

- Q. 17, page 9
- Q. 18, page 10
- Q. 4, page 3
- Q. 5, page 4
- Q. 8, page 5

### Réduction des endomorphismes (• Red)

- Q. 11, page 6
- Q. 12, page 7
- Q. 13, page 7
- Q. 1, page 2
- Q. 22, page 11
- Q. 23, page 12
- Q. 24, page 13
- Q. 2, page 2
- Q. 3, page 2
- Q. 9, page 6