



Groupe Ipesup

**Optimal Sup-Spé**

## CCINP

Maths Spé – CPGE Concours 2026

### MATHÉMATIQUES PSI

#### Énoncé du sujet

Dans ce document, on traite le sujet CCP PSI 2026 en modifiant quelques fois l'énoncé pour que ce soit faisable avec le programme de Mathématiques supérieures. On sollicitera le programme de PCSI mais aussi de MPSI s'il faut. On mettra en gris l'énoncé original à modifier. Certaines questions auront une étoile : cela signifie que c'est théoriquement faisable mais c'est plutôt dans l'esprit de la deuxième année.

#### EXERCICE 1

##### Un jeu de pile ou face

###### Préliminaires

**Q1.** On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ .

Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $] -1, 1[$ , et que pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Q2.** Établir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in ] -1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

En appliquant une formule de Taylor sur la fonction  $f$ , montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}_{\geq k}, \forall x \in ] -1, 1[, f^k(x) = \sum_{n=k}^N \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} + R_N(x).$$

En déduire la formule demandée.

###### Étude d'un jeu de Pile ou Face

Soit  $p \in ]0, 1[$ . Deux joueurs effectuent des lancers indépendants d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est  $p$ . Le jeu se déroule de la manière suivante.

- Le joueur 1 effectue une succession de lancers et s'arrête lorsqu'il obtient *Pile* pour la première fois. *On admettra qu'avec une probabilité de 1, le joueur obtient Pile après un nombre fini de lancers.*
- Le joueur 2 effectue ensuite le même nombre de lancers que le joueur 1 et compte le nombre de fois où il a obtenu *Pile*.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

- On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de lancers effectués par le joueur 1.
- On note  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de *Pile* obtenus par le joueur 2.

**Q3.** Préciser la loi de  $X$ .

**Q4.** Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , calculer la probabilité de l'événement  $\{Y = k\}$  sachant  $\{X = n\}$ , notée par la suite  $P(Y = k \mid X = n)$ .

**Q5.** Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , exprimer  $P(Y = k)$  en fonction des réels  $P(Y = k \mid X = n)$  et  $P(X = n)$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour continuer, on admet donc que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) b_n$$

où  $a_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  et  $b_n = (1-p)^{n-1} p$ .

**Q6.** Établir que :

$$P(Y = 0) = \frac{1-p}{2-p}.$$

**Q7.** Établir que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$P(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

## EXERCICE 2

### Une caractérisation de la fonction Gamma

L'objet de cet exercice est l'étude d'une caractérisation de la fonction Gamma connue sous le nom de théorème de Bohr-Mollerup.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant.

**Lemme 1.** Si  $g$  est une fonction convexe sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et  $a \in I$ , alors pour tous  $x, y$  éléments de  $I \setminus \{a\}$  tels que  $x \leq y$ ,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \frac{g(y) - g(a)}{y - a}.$$

Dans cet exercice, nous cherchons à montrer que la seule fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  qui vérifie :

$$(S) \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = x f(x) \\ f(1) = 1 \\ \ln \circ f \text{ est une fonction convexe} \end{cases}$$

est la fonction  $\Gamma$ , définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

**Existence : la fonction  $\Gamma$  vérifie (S)**

**Q8.** Montrer que la fonction  $\Gamma$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\Gamma(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . **On note dans toute la suite**  $h(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$  **pour**  $x, t > 0$ . Soit  $x > 0$ . Vérifier que  $h(x, \cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$  puis établir un équivalent simple de  $h(x, \cdot)$  au voisinage de  $0^+$ .

**Q9.** Montrer que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

Dans les questions **Q10** à **Q12**,  $a$  et  $b$  désignent des réels vérifiant  $0 < a < 1 < b$  et  $\varphi$  désigne la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} & \text{si } t \in ]0, 1] \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \in ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

**Q10.** Établir que :

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*, \quad t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t).$$

**Q11.** Pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ , on définit la fonction  $\psi_k$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \psi_k(t) = |\ln t|^k \varphi(t).$$

Montrer que les fonctions  $\psi_k$  ( $k \in \{0, 1, 2\}$ ) sont intégrables sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q12.** Dédurre des deux questions précédentes que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Donner l'expression des deux fonctions  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  sous une forme intégrale.

**Q13.** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  vérifiant  $\alpha < \beta$ . Pour tout couple  $(u, v)$  de fonctions continues sur  $[\alpha, \beta]$ , on pose :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} u(t) v(t) dt.$$

Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^0([\alpha, \beta])$ .

**Q14.** En utilisant la question **Q13** et en ayant recours à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x).$$

En déduire que la fonction  $\ln \circ \Gamma$  est convexe et conclure que  $\Gamma$  vérifie bien (S). Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz et dériver deux fois sur  $I$  la fonction  $\ln \circ f$  lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et strictement positive  $I$ .

On admet alors que  $\Gamma$  vérifie bien (S).

### Unicité

On suppose que  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  qui vérifie (S). On introduit par ailleurs la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \ln(f(x)).$$

**Q15.** Montrer que si  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$f(x+n) = x(x+1) \cdots (x+n-1) f(x).$$

En déduire les valeurs de  $f(n+1)$  et de  $g(n+1)$ .

**Q16.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x+n+1) = g(x) + \ln(x(x+1) \cdots (x+n)).$$

**Q17.** À l'aide du **Lemme 1**, justifier que :

$$\forall x \in ]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(x+n+1) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1).$$

**Q18.** À l'aide des questions **Q16** et **Q17**, établir que :

$$\forall x \in ]0, 1], \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}. \quad (1)$$

**Q19.** Déduire des questions **Q14** et **Q18** que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f(x) = \Gamma(x)$ .

**Q20.** En utilisant la question **Q15**, conclure que  $f = \Gamma$ .

## PROBLÈME

### Étude d'une classe d'endomorphismes

#### Notations

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , par convention  $u^0 = \text{Id}_E$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on note :

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $F_1, \dots, F_k$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Lorsque la somme  $F_1 + \dots + F_k$  est directe, on la note  $\bigoplus_{i=1}^k F_i$ . Par convention, si  $k = 0$  (cas d'une somme vide), la somme vaut  $\{0\}$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $M_p(\mathbb{K})$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices de taille  $p \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}_p[X]$  le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $p$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + 2q = n$  et des sous-espaces vectoriels  $D_1, \dots, D_p, P_1, \dots, P_q$  de  $E$  stables par  $u$ , les  $D_i$  étant de dimension 1 et les  $P_j$  de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q P_j.$$

- (ii) il existe  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $p + 2q = n$  et une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists (M_1, \dots, M_q) \in M_2(\mathbb{K})^q : \text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & & & M_1 & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & M_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui vérifient (i) ou (ii).

#### Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble  $\mathcal{D}$ . Après avoir étudié deux exemples dans la **partie I**, on étudie dans la **partie II** les endomorphismes nilpotents de  $\mathcal{D}$ . Dans la **partie III**, on démontre un critère d'appartenance à  $\mathcal{D}$  faisant intervenir des polynômes annulateurs.

### Partie I - Deux exemples

Dans cette partie, on note  $E = \mathbb{K}_2[X]$ . On définit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  par :

$$u : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto X^2 P'' + P' \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{array} .$$

#### Étude de $u$

**Q21.** Écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$ . Est-elle diagonalisable ? Écrire la matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$ . Calculer la dimension de son noyau.

**Q22.** Déterminer  $\text{Ker } u^2$  et justifier que  $\text{Ker } u^2$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$ .

**Q23.** Donner une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et conclure que  $u \in \mathcal{D}$ .

#### Étude de $v$

**Q24.** Donner la matrice de  $v$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**Q25. (★)** Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension 1 stables par  $v$ . On donne une indication pour répondre à la question : calculer  $\ker(v)$  puis montrer que s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in E \setminus \{0\}$  vérifiant  $u(x) = \lambda x$ , alors  $\lambda = 0$ .

**Q26.** Montrer que  $\mathbb{K}_1[X]$  est le seul sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 2 stable par  $v$ .

**Q27. (★)** En déduire que  $v \notin \mathcal{D}$ .

**Q28. (★)**  $\mathcal{D}$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  ?

### Partie II - Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0$ . Dans ce cas, le plus petit entier naturel  $k$  vérifiant  $u^k = 0$  est appelé indice de nilpotence de  $u$ .

Dans la suite, on note  $\mathcal{N}$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  nilpotents et on pose :

$$\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) : u^2 = 0\}.$$

Dans toute cette partie,  $u \in \mathcal{N}$  est un endomorphisme nilpotent d'indice  $k \in \mathbb{N}^*$  et de rang  $r \in \mathbb{N}$ .

On note  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ .

**Cas  $n = 1$**

**Q29.** Que dire de  $u$  si  $\dim E = 1$  ?

**Cas  $n = 2$**

On suppose dans ce cas que  $\dim E = 2$  et que  $u$  est non nul.

**Q30.** Soit  $x \in E$  tel que  $u^{k-1}(x) \neq 0$ . Justifier que  $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$  est une famille libre.

**Q31.** En déduire que  $k = 2$ , puis que  $u \in \mathcal{N}_2$ .

**Cas général**

$E$  désigne maintenant un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

**Q32.** Montrer que  $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$ . Pour répondre à la question, on pourra faire des produits par blocs.

Soit  $u \in \mathcal{N}_2$ .

**Q33.** Justifier que  $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$  et que  $r \leq n - r$ .

**Q34.** Notons  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $\text{Im } u$  que l'on complète en une base  $(e_1, \dots, e_{n-r})$  de  $\text{Ker } u$ . Soient  $f_1, \dots, f_r \in E$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $u(f_i) = e_i$ .

Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$  est une base de  $E$ .

**Q35.** Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & & \\ & J & (0) & & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & J \end{pmatrix},$$

où  $0_{n-2r}$  désigne la matrice nulle de  $M_{n-2r}(\mathbb{K})$  et où les autres blocs diagonaux égaux à  $J$  sont en nombre  $r$ .

**Q36.** En déduire que  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$ .

Cette partie s'adresse plutôt aux MPSI qui vont en MP

**Partie III - Un critère d'appartenance à  $\mathcal{D}$**

Dans toute cette partie,  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un endomorphisme quelconque.

On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples ou doubles, alors  $u \in \mathcal{D}$ .

**Q37.** Soient  $a, b \in \mathbb{K}$ , distincts. On définit :

$$\varphi : \begin{matrix} \mathbb{K}_1[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ (A, B) & \longmapsto & (X - a)^2 A + (X - b)^2 B \end{matrix} .$$

Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple  $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$  tel que :

$$(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1.$$

**Q38. (\*)** Justifier que pour tous  $a, b \in \mathbb{K}$  distincts,  $\text{Ker } (u - a \text{Id}_E)^2 \cap \text{Ker } (u - b \text{Id}_E)^2 = \{0\}$ .

Soient  $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$  deux familles de scalaires telles que les  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$  sont distincts. On notera que l'une des deux familles  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  et  $(\beta_1, \dots, \beta_q)$  peut éventuellement être vide.

**Q39.** Justifier que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker } (u - \alpha_i \text{Id}_E)$$

est directe.

**Q40.**(★) Montrer que la somme :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

est directe. On pourra procéder par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}$ .

**Q41.**(★) Soit :

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]. \quad (2)$$

Pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on note  $P_i$ ,  $Q_j$  et  $R_j$  les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i) P_i, \quad P = (X - \beta_j) Q_j, \quad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$  est libre. En déduire que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ .

On suppose à partir de maintenant que le polynôme  $P$  défini en (2) est annulateur de  $u$ .

**Q42.**(★) En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base  $\mathcal{B}$ , justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id}_E)^2.$$

**Q43.** Conclure que  $u \in \mathcal{D}$ .

On pourra utiliser le résultat de la question **Q36**.

**FIN**