



Groupe Ipesup

Optimal Sup-Spé

CCINP

Maths Spé – CPGE Concours 2026

MATHÉMATIQUES PSI

Corrigé du sujet

Contenu

Après une présentation du sujet, on présente un corrigé détaillé pour les étudiants qui veulent travailler cette annale. Le corrigé est agrémenté de petits encadrés qui rappellent quels chapitres sont sollicités à chaque question.

Un index se trouve en fin de document afin de s'y repérer convenablement. En rouge, les thématiques de Spé et en orange, les thématiques de Sup.

Préambule

- Ce sujet CCP contient 2 exercices et un problème.
- Pour le premier exercice, ce sont des probabilités. Assez proche du cours et de ses applications directes, il y a quelques légères technicités à surmonter. Dans l'ensemble, l'exercice est assez facile.
- Pour le deuxième exercice, on parle de la fonction Γ d'Euler. Cette fonction est omniprésente aux concours. On établit dans un premier temps quelques **propriétés classiques à savoir refaire** puis on démontre le théorème de Bohr-Mollerup. Cette seconde partie est davantage technique mais les questions sont très guidées.
- En ce qui concerne le problème, c'est un problème d'algèbre linéaire. La partie I traite de deux exemples explicites et permettent de rentrer dans le sujet. Il n'y a rien à dire en particulier.
- Par contre, la partie II est très classique (en ce qui concerne les propriétés sur les nilpotents). Le niveau est un peu plus élevé mais ça reste assez important à savoir faire.
- Enfin, cette dernière partie n'est pas trop (voire pas du tout) dans l'esprit du programme de PSI. On redémontre des résultats assez théoriques et techniques, résultats qui sont utilisables (sous une forme plus forte) en MP. Le/la candidat(e) qui s'y aventure est prévenu(e).
- Le sujet est affreusement long! 43 questions, pas forcément triviales. On pouvait bien sûr traiter ce qui nous plaisait (par exemple, exercice 1, une bonne partie de l'exercice 2 et la partie I du problème, devrait représenter un(e) candidat(e) admissible).

Exercice 1 : un jeu de pile ou face

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons (P_n) la propriété suivante : f est de classe \mathcal{C}^k sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Chap. :
• Fonctions

- Soit $k = 0$. Alors f est bien continue sur $] - 1, 1[$ puisque $x \mapsto 1 - x$ est continue et ne s'annule pas sur $] - 1, 1[$. On a aussi

$$\forall x \in] - 1, 1[, f^{(k)}(x) = f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

donc (P_0) est vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k soit vraie. Alors $x \mapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - 1, 1[$ puisque $x \mapsto (1-x)^{k+1}$ est de classe \mathcal{C}^1 et ne s'annule pas sur $] - 1, 1[$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(] - 1, 1[, \mathbb{R})$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = k!(-1)(k+1) \frac{-1}{(1-x)^{k+2}} = \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.$$

Ainsi, (P_{n+1}) est vraie.

- Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^k(] - 1, 1[, \mathbb{R}) ; \forall x \in] - 1, 1[, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Remarque. Pour montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ , on peut aussi dire que f est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ donc en particulier, elle est \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1[$.

2. On a le développement en série entière

$$\forall x \in] - 1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Chap. :
• Sér. Ent.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque c'est une série entière, on peut dériver autant de fois que l'on souhaite terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence donc

$$\forall x \in] - 1, 1[, f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Par la question précédente, on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] - 1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

3. X modélise le temps d'attente du premier succès d'une succession d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p : le cours assure que X suit une loi géométrique de paramètre p .

4. Pour réaliser $(Y = k)$ sachant $(X = n)$, il faut obtenir k succès en les n tentatives disponibles, en répétant n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p : ainsi, la loi de Y sachant $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètres (n, p) et

Chap. :
• Var. Aléa Spé

Chap. :
• Var. Aléa Sup

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

5. La famille $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements : par la formule des probabilités totales,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n).$$

Chap. :
• Proba Sup

6. On applique la formule précédente pour $k = 0$: on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = n) \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} (1-p)^{n-1} p \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2n} \\ &= \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)^2}{1 - (1-p)^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{2p - p^2} = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

Chap. :
• Calcul

On a bien

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1-p}{2-p}.$$

7. On développe la formule de la question 5. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} (1-p)^{n-1} p \\ &= p^{k+1} (1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (1-p)^{n-1} (1-p)^{1-k} \\ &= \frac{p^{k+1} (1-p)^{k-1}}{k!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} ((1-p)^2)^{n-k} \\ &\stackrel{\star}{=} \frac{p^{k+1} (1-p)^{k-1}}{k!} \frac{k!}{(1 - (1-p)^2)^{k+1}} \\ &= \frac{p^{k+1} (1-p)^{k-1}}{(2p - p^2)^{k+1}} \\ &\stackrel{p \neq 0}{=} \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \end{aligned}$$

Chap. :
• Calcul

On a (\star) par la question 2 pour $x = 1 - p \in]0, 1[$. On a donc bien

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}.$$

Exercice 2 : une caractérisation de la fonction Gamma

Dans toute la suite, on notera $h(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$.

8. Soit $x > 0$.

- Déjà, $h(x, \cdot)$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} .
- Au voisinage de 0, $h(x, t) \sim \frac{1}{t^{1-x}}$. Or l'étude des intégrales de Riemann nous indique que $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 dès lors que $x > 0$.
- Par ailleurs, $t^2 h(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $h(x, t) = o_{t \rightarrow +\infty}(1/t^2)$ et $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$: par comparaison, $h(x, \cdot)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Chap. :
• TCD

Ainsi, $h(x, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}^{+*} et $\Gamma(x)$ est bien définie.

Par ailleurs, $h(x, \cdot)$ étant non nulle et positive pour tout $x > 0$, l'intégrale de $h(x, \cdot)$ sur \mathbb{R}^{+*} l'est donc aussi :

$$\forall x > 0, \Gamma(x) > 0.$$

9. Soit $0 < a < b$ deux réels. Alors :

$$\int_a^b t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_a^b + x \int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Chap. :
• Int.

On a $-a^x e^{-a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$ par produit de limites, et $-b^x e^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Or, pour $x > 0$, l'intégrale de droite converge quand $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow +\infty$ vers $x\Gamma(x)$. L'égalité passe donc la limite en :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

10. Soit $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^{+*}$.

- Si $t \in]0, 1]$, alors $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ et $0 < e^{-t} \leq 1$ donc

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1}.$$

- Si $t \in [1, +\infty[$, alors $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ donc

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{b-1} e^{-t}.$$

Chap. :
• Fonctions

Ainsi, on a

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}^{+*}, t^{x-1} e^{-t} \leq \varphi(t).$$

11. Montrons déjà que ψ_0 est intégrable. Pour cela on constate que ψ_0 est

- continue par morceaux sur \mathbb{R}^{+*} ,
- intégrable au voisinage de 0 car équivalente à t^{a-1} et $t \mapsto t^{a-1}$ est intégrable au voisinage de 0 par le critère de Riemann ($1 - a < 1$),
- intégrable au voisinage de $+\infty$ car par croissances comparées, $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(t^{-2})$ et $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Chap. :
• Int.

Ainsi, ψ_0 est intégrable.

Soit maintenant $k \in \{1, 2\}$. Alors ψ_k est

- continue par morceaux sur \mathbb{R}^{+*} ,

- intégrable au voisinage de 0 : en effet, elle est équivalente à $|\ln^k(t)|t^{a-1}$ et en $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$, on a

$$|\ln^k(t)|t^{a-1} = \underbrace{|\ln^k(t)|t^\varepsilon}_{\rightarrow 0} t^{a-1-\varepsilon} = o(t^{a-1-\varepsilon})$$

par croissances comparées et comme $a - 1 - \varepsilon = \frac{a}{2} - 1 > -1$, $t \mapsto t^{a-1-\varepsilon}$ est intégrable au voisinage de 0 par le critère de Riemann et par comparaison, ψ_k est intégrable au voisinage de 0.

- intégrable au voisinage de $+\infty$ car par croissances comparées, $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(t^{-2})$ et $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, ψ_0, ψ_1, ψ_2 sont intégrables sur \mathbb{R}^{+*} .

12. On va appliquer le théorème de régularité \mathcal{C}^2 des intégrales à paramètres.

- $\forall t > 0, x \mapsto h(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}) : \forall t > 0, \forall x > 0, \forall n \in \{0, 1, 2\}, \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x) = \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}$.
- Pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}, t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^{+*} .
- **Domination** : Soit (a, b) tels que $0 < a < 1 < b < +\infty$. Alors :

$$\forall n \in \{0, 1, 2\}, \forall x \in [a, b], \forall t > 0, |\ln^n(t)|t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln^n(t)|\varphi(t) = \psi_n(t).$$

Comme ψ_n est intégrable pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on a la domination souhaitée.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, j'ai :

$$\Gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) ; \forall x > 0, \forall n \in \{0, 1, 2\}, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x) dt = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)t^{x-1}e^{-t} dt.$$

Chap. :
• TCD

13. Soit u_1, u_2, u, v des fonctions continues sur $[\alpha, \beta]$, λ, μ des scalaires.

- Linéarité à gauche.

$$\begin{aligned} \langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle &= \int_\alpha^\beta (\lambda u_1(t) + \mu u_2(t))v(t) dt \\ &= \lambda \int_\alpha^\beta u_1(t)v(t) dt + \mu \int_\alpha^\beta u_2(t)v(t) dt \\ &= \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle. \end{aligned}$$

Chap. :
• EPR

- Symétrie.

$$\langle u, v \rangle = \int_\alpha^\beta u(t)v(t) dt = \int_\alpha^\beta v(t)u(t) dt = \langle v, u \rangle.$$

- Linéarité à droite : hérite de la linéarité à gauche et de la symétrie.
- Caractère positif : on a $\langle u, u \rangle = \int_\alpha^\beta u^2(t) dt$ et comme $u^2 \geq 0$, par croissance de l'intégrale, $\langle u, u \rangle \geq 0$.
- Caractère défini : si $\langle u, u \rangle = 0$, comme u^2 est continue positive, u^2 est la fonction nulle donc u est la fonction nulle sur $[\alpha, \beta]$.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}'([\alpha, \beta], \mathbb{R})$.

14. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall u, v \in \mathcal{C}^0([\alpha, \beta], \mathbb{R}), \langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

Chap. :
• EPR

i.e.

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} u(t)v(t)dt \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} u^2(t)dt \int_{\alpha}^{\beta} v^2(t)dt.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec

$$u : t \in]0, +\infty[\mapsto \ln(t)e^{\frac{-t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \in \mathbb{R}$$

et

$$v : t \in]0, +\infty[\mapsto e^{\frac{-t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln(t)e^{\frac{-t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} e^{\frac{-t}{2}} t^{\frac{x-1}{2}} dt \right)^2 = \left(\int_{\alpha}^{\beta} \ln(t)e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} \ln^2(t)e^{-t} t^{x-1} dt \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Comme tout converge, l'inégalité passe à la limite quand $\beta \rightarrow +\infty$ et $\alpha \rightarrow 0$ en

$$\left(\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} \ln^2(t)e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

et par la question 12,

$$\boxed{(\Gamma')^2 \leq \Gamma \Gamma''}.$$

Comme $\Gamma > 0$ et est \mathcal{C}^2 , $\ln \circ \Gamma$ est aussi \mathcal{C}^2 et on a

$$(\ln \circ \Gamma)'' = \frac{\Gamma \Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} \geq 0$$

par l'inégalité démontrée ci-avant. Ainsi, $\boxed{\ln \circ \Gamma \text{ est bien convexe}}$.

Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, $\boxed{\Gamma \text{ vérifie bien (S)}}$ grâce aux deux points montrés juste avant et la question 9.

On note (a), (b), (c) les trois propriétés respectivement de (S).

15. On montre ceci par récurrence.

- Si $n = 0$, il n'y a rien à faire.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x+n) = f(x) \prod_{k=1}^n (x+k-1)$. Alors

$$\forall x > 0, f(x+n+1) \stackrel{(a)}{=} (x+n)f(x+n) = f(x)(x+(n+1)-1) \prod_{k=1}^n (x+k-1) = f(x) \prod_{k=1}^{n+1} (x+k-1).$$

- Par le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f(x+n) = f(x) \prod_{k=1}^n (x+k-1)}.$$

Ainsi, pour $x = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) = f(1) \prod_{k=1}^n (1+k-1) \stackrel{(b)}{=} n!$$

et

$$g(n+1) = \ln(f(n+1)) = \ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k).$$

Chap. :
• Calcul

16. Par la question 15,

$$\forall x > 0, \ln(f(x+n+1)) = \ln\left(f(x) \prod_{k=1}^{n+1} (x+k-1)\right) = \ln(f(x)) + \ln\left(\prod_{k=0}^n (x+k)\right).$$

On reconnaît donc

$$\boxed{\forall x > 0, g(x+n+1) = g(x) + \ln\left(\prod_{k=0}^n (x+k)\right)}.$$

17. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de g (par (c)) et par le lemme des pentes croissantes, puisqu'on a les inégalités,

$$n \leq n+1 \leq n+1+x \leq n+2$$

avec $x \in]0, 1]$, on a avec les deux premières inégalités

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{n+1-n} \leq \frac{g(n+1+x) - g(n)}{n+1+x-n} \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x}$$

et avec les deux dernières,

$$\frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \frac{g(n+2) - g(n+1)}{n+2 - (n+1)}$$

et cela donne

$$\boxed{g(n+1) - g(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq g(n+2) - g(n+1)}.$$

Chap. :
• Convexité

18. Soit $x \in]0, 1]$. On a $\forall t > 0, g(t+1) = g(t) + \ln(t)$ donc l'inégalité précédente devient

$$\ln(n) \leq \frac{g(n+1+x) - g(n+1)}{x} \leq \ln(n+1)$$

ce qui donne

$$x \ln(n) \leq g(n+1+x) - \ln(n!) \leq x \ln(n+1) = x \ln(n) + x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On obtient donc

$$0 \leq g(n+1+x) - \ln(n!n^x) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ce qui donne par la question 16,

$$0 \leq g(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^n (x+i)}\right) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, par encadrement puis par continuité de exp, on a

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^n (x+i)}.$$

Chap. :
• Limites

19. Ainsi, si f vérifie (S) , alors nécessairement

$$\forall x \in]0, 1], f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^n (x+i)}$$

Comme Γ vérifie (S) ,

$$\forall x \in]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{i=0}^n (x+i)}$$

donc $f = \Gamma$ sur $]0, 1]$.

20. On a

$$\forall x > 0, \ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x)) ; \forall x > 0, \ln(f(x+1)) \stackrel{(b)}{=} \ln(x) + \ln(f(x))$$

D'où :

$$\forall x > 0, (\ln(\Gamma) - g)(x+1) = (\ln(\Gamma) - g)(x).$$

Ainsi, $\ln(\Gamma) - g$ est 1-périodique et la question précédente montre qu'elles sont égales sur $]0, 1]$. Par périodicité, elles sont égales sur \mathbb{R}^{+*} donc en passant à l'exponentielle, on a

$$f = \Gamma \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}.$$

Chap. :
• Limites
• Fonctions

Problème : étude d'une classe d'endomorphisme

Partie I. Deux exemples

21. On a $u(1) = 0 + 0 = 0$; $u(X) = 0 + 1 = 1$; $u(X^2) = 2X^2 + 2X$ donc

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

u n'est pas diagonalisable : en effet, les deux dernières colonnes de cette matrice sont libres donc $\text{rg}(u) = 2 = 3 - \dim(\ker(u))$ par le théorème du rang. Ainsi, $\dim(\ker(u)) = 1$ donc la dimension de l'espace propre pour la valeur propre 0 ne coïncide pas avec la multiplicité de 0 en tant que racine de $\chi_u = X^2(X - 2)$.

22. On a

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker(u^2) = \text{Vect}(1, X)$.

Ensuite, si $x \in \ker(u^2)$, alors $u^2(u(x)) = u(u^2(x)) = u(0) = 0$ donc $u(x) \in \ker(u^2)$ et $u(\ker(u^2)) \subset \ker(u^2)$.

23. 2 étant valeur propre de u , soit $P \in E$ non nul tel que $u(P) = 2P$. Alors $X^2P'' + P' = 2P$. Si P est de degré 1 ou 0, alors $X^2P'' = 0$ donc $\deg(P) = \deg(P')$ ce qui n'est pas possible.

Chap. :
• Mat App
Lin
• Red

Chap. :
• Mat App
Lin

Chap. :
• Mat App
Lin
• Pol

Ainsi, P est nul (exclu) ou P est de degré 2. Ainsi, $(1, X, P)$ est échelonnée en degré donc libre et par cardinalité, c'est une base de E . On a

$$\text{Mat}_{P,1,X}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $u \in \mathcal{D}$ par l'assertion (ii).

24. On a

$$v(1) = 0 ; v(X) = 1 ; v(X^2) = 2X.$$

Ainsi,

$$\text{Mat}_{1,X,X^2}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chap. :

• Mat App
Lin

25. Soit D un espace vectoriel stable par v de dimension 1 : il est de la forme $\text{Vect}(x)$ avec $x \neq 0$. La stabilité donne l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \lambda x$ donc x est donc un vecteur propre, et λ la valeur propre associée¹. Alors comme $\text{Sp}(v) = \{0\}$, $\lambda = 0$ donc $D \subset \mathcal{E}_0(v) = \ker(v)$. Comme $\text{rg}(v) = 2$ (deux colonnes non colinéaires et une colonne nulle), $\dim(\ker(v)) = 1 = \dim(D)$ donc $D = \ker(v)$.

Chap. :

• Mat App
Lin
• Red

Ainsi, le seul espace propre de dimension 1 est $\ker(v)$.

26. Soit $\mathcal{P} = \text{Vect}(P, Q)$ un sous-espace vectoriel de E stable par v . Supposons un instant que P soit de degré 2, alors $(v^2(P), v(P), P)$ est une famille échelonnée en degré de E donc est libre. Ainsi, \mathcal{P} serait de dimension au moins 3 ce qui est exclu.

Chap. :

• Mat App
Lin
• Red

Ainsi, P est de degré au plus 1, tout comme Q . On en déduit que $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}_1[X]$. Ce sont deux espaces de même dimension donc on en déduit que

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}_1[X].$$

Réciproquement, il est clair que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par v .

On en déduit que

un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par v est nécessairement $\mathbb{R}_1[X]$.

27. Supposons un instant que $v \in \mathcal{D}$. Comme v n'est pas diagonalisable, il existe par (ii) une base \mathcal{B} et λ, a, b, c, d des scalaires tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Chap. :

• Mat App
Lin
• Red
• App Lin

En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit que $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par v : par la question précédente,

$$\text{Vect}(e_1) = \ker(v) ; \text{Vect}(e_2, e_3) = \mathbb{K}_1[X].$$

On sait donc que $\lambda = 0$. Ensuite, l'induit de v induit par $\mathbb{K}_1[X]$, noté $v_{\mathbb{K}_1[X]}$, vérifie $v_{\mathbb{K}_1[X]}^2 = 0$ puisque $\forall P \in \mathbb{K}_1[X], v_{\mathbb{K}_1[X]}^2(P) = v^2(P) = 0$ (on dérive deux fois un polynôme de degré au plus 1).

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(e_2, e_3)}(v_{\mathbb{K}_1[X]})$$

1. A retenir : une droite stable, c'est une droite engendré par un vecteur propre.

et donc

$$M^2 = \text{Mat}_{(e_2, e_3)}(u_{\mathbb{K}_1[X]^2}) = 0$$

ce qui donne par blocs,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Or $v^2 \neq 0$ donc on obtient une absurdité. On a donc $v \notin \mathcal{D}$.

28. Notons $w : P \in E \mapsto X^2 P''$. Alors $w(1) = 0$; $w(X) = 0$ et $w(X^2) = 2X^2$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{(1, X, X^2)}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Chap. :
 • Mat App
 Lin
 • Red

donc w est diagonalisable et (ii) est satisfaite donc $w \in \mathcal{D}$. Par ailleurs, $u \in \mathcal{D}$ mais $u - w = v \notin \mathcal{D}$ donc \mathcal{D} n'est pas stable par combinaison linéaire :

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E}.$$

Partie II. Le cas des endomorphismes nilpotents

29. Supposons que $\dim(E) = 1$. Soit $x \neq 0$. On a $E = \text{Vect}(x)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors $0 = u^k(x) = \lambda^k x$ donc $\lambda^k = 0$ i.e. $\lambda = 0$ et $u = 0$.

30. Soit $x \in E \setminus \ker(u^{k-1})$ qui est non vide car $u^{k-1} \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = \{u^i(x) : 0 \leq i \leq k-1\}$. Montrons que c'est une famille libre.

Chap. :
 • App Lin

Soit donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ des réels tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0.$$

Chap. :
 • App Lin
 • E.V.

Soit $A = \{i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket : \lambda_i \neq 0\}$. Supposons par l'absurde que A est non vide. Alors A est une partie non vide de \mathbb{N} donc admet un plus petit élément i_0 . On a donc $\lambda_i = 0$ si $i < i_0$ et $\lambda_{i_0} \neq 0$ donc

$$\sum_{i=i_0}^{k-1} \lambda_i u^i(x) = 0.$$

On compose par u^{k-i_0-1} . On a alors

$$0 = \sum_{i=i_0}^{k-1} \lambda_i u^{k-i_0+i-1}(x) = \lambda_{i_0} u^{k-i_0+i_0-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{k-1} \lambda_i \underbrace{u^{k-i_0+i-1}(x)}_{=0} = \lambda_{i_0} u^{k-1}(x).$$

(cela donne 0 car $k - i_0 + i - 1 \geq k$). Comme $u^{k-1}(x) \neq 0$, nécessairement, $\lambda_{i_0} = 0$ donc $i_0 \notin A$. Contradiction. Ainsi, A est vide donc \mathcal{B} est libre.

Après, on permute les coefficients si on veut avoir la famille dans le même ordre.

31. Dans la question précédente, on obtient une famille libre de cardinal k . Comme l'espace E est de dimension 2, on a $k \leq 2$.

Si $k = 1$, alors $u^k = u^1 = 0$ ce qui est exclu. Ainsi, $k = 2$. Ainsi, $u \in \mathcal{N}$.

Chap. :
 • $\dim < \infty$

35. On change l'ordre des vecteurs : considérons la famille $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, f_1, e_1, f_2, e_2, \dots, f_r, e_r) =: \mathcal{B}'$. Notons donc

- $g_i = e_{r+i}$ pour $i \in \llbracket 1, n - 2r \rrbracket$
- $h_{i,j} = e_i$ si $j = 1$ et $h_{i,j} = f_i$ si $j = 2$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n - 2r \rrbracket, u(g_i) = 0$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, u(h_{i,2}) = e_i = h_{i,1} ; u(h_{i,1}) = 0.$$

On a donc par blocs

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0_{n-2r} & & & \\ & J & & \\ & & \ddots & \\ & & & J \end{pmatrix}$$

avec r fois la matrice J .

36. \mathcal{N}_2 est clairement inclus dans \mathcal{N} . Par ailleurs, la question précédente assure que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D}$. On en déduit que

$$\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{D}$$

et par la question 32, on a

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N} \cap \mathcal{D}$$

Chap. :
• *Mat App*
Lin

Partie III. Un critère d'appartenance à \mathcal{D}

37. Déjà, $\dim(\mathbb{K}_1[X]^2) = 2 \dim(\mathbb{K}_1[X]) = 4$ et $\dim(\mathbb{K}_3[X]) = 4$. Ainsi, il suffit de montrer que φ est une application linéaire injective. La linéarité découle de la linéarité de la multiplication par un polynôme quelconque. Ensuite, φ est bien définie puisque si $A, B \in \mathbb{K}_1[X]$, les polynômes $(X - a)^2 A$ et $(X - b)^2 B$ sont des polynômes de degré au plus 3 donc $\varphi(A, B) \in \mathbb{K}_3[X]$. Si on a $A, B \in \mathbb{K}_1[X]$ avec $\varphi(A, B) = 0$, alors

$$(X - a)^2 A = -(X - b)^2 B.$$

On présente deux preuves selon l'appétence en arithmétique.

- Ainsi, $(X - b)^2$ divise $(X - a)^2 A$. Comme $a \neq b$, $(X - b)^2$ ne divise pas $(X - a)^2$ donc par le lemme de Gauss, $(X - a)^2$ divise A . En particulier, $\deg((X - a)^2) = 2 > \deg(A)$ donc $A = 0$. Ainsi, $(X - b)^2 B = 0$ donc $B = 0$.
- On évalue la relation en a : on a $(a - b)^2 B(a) = 0$ donc $B(a) = 0$. Comme B est de degré au plus 1, il s'écrit donc $\lambda(X - a)$. Ainsi, la relation se réécrit

$$(X - a)^2 A = -(X - b)^2 \lambda(X - a)$$

et en divisant par $(X - a)$, on a $(X - a)A = -\lambda(X - b)^2$ donc en évaluant en a , $\lambda(a - b)^2 = 0$ donc $\lambda = 0$ et $B = 0$. Fatalement, $A = 0$.

On en déduit que φ est injective. Par égalité des dimensions, φ est un isomorphisme.

Ainsi, comme $1 \in \mathbb{K}_3[X]$, il existe un unique couple $(A, B) \in (\mathbb{K}_1[X])^2$ tel que $\varphi(A, B) = 1$ *i.e.*

$$\exists (A, B) \in (\mathbb{K}_1[X])^2, (X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1.$$

Chap. :
• *App Lin*
• *Mat App*
Lin
• *Pol*

38. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2, a \neq b$. Soit $x \in \ker((u - a\text{Id}_E)^2) \cap \ker((u - b\text{Id}_E)^2)$. Soit A, B obtenu à la question d'avant vérifiant

$$A(X - a)^2 + B(X - b)^2 = 1.$$

On évalue en u :

$$A(u) \circ (u - a\text{Id}_E)^2 + B(u) \circ (u - b\text{Id}_E)^2 = \text{Id}_E.$$

On évalue en x :

$$A(u)[(u - a\text{Id}_E)^2(x)] + B(u)[(u - b\text{Id}_E)^2(x)] = 0 + 0 = \text{Id}_E(x) = x.$$

On en déduit que $x = 0$ et

$$\ker((u - a\text{Id}_E)^2) \cap \ker((u - b\text{Id}_E)^2) = \{0\}.$$

Chap. :
• PolEndo

39. On peut remarquer que c'est une sommes d'espaces propres de u pour des valeurs propres 2 à 2 distinctes : le cours assure que ces espaces propres sont en sommes directes. On redémontre ci-dessous le résultat.

Si la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est vide, il n'y a rien à faire. Sinon, on fait une récurrence sur p .

- Si $p = 1$, il n'y a rien à faire.

- Supposons que la somme $\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe. Soit $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in \prod_{i=1}^{p+1} \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ telle que

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i = 0$$

ce qui donne

$$-x_{p+1} = \sum_{i=1}^p x_i.$$

Alors $0 = u(0) = \sum_{i=1}^{p+1} u(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i$ donc

$$-\alpha_{p+1} x_{p+1} = \sum_{i=1}^p u(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i.$$

On a donc

$$\sum_{i=1}^p \alpha_{p+1} x_i = \sum_{i=1}^p u(x_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i$$

donc

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_{p+1} - \alpha_i) x_i = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \underbrace{(\alpha_{p+1} - \alpha_i)}_{\neq 0} x_i = 0$$

donc chaque x_i est nul pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a donc

$$0 = \sum_{i=1}^{p+1} x_i = x_{p+1}$$

Chap. :
• App Lin
• Red
• E. V.

donc finalement, $\bigoplus_{i=1}^{p+1} \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe.

- Par le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$ (on n'a pas besoin de E de dimension finie donc on ne limite pas le nombre de sous-espace),

la somme $\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ est directe.

40.

- Si $q = 0$, il n'y a rien à faire.
- Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que la somme

$$\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

soit directe. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ et soit $(y_1, \dots, y_{q+1}) \in \prod_{j=1}^{q+1} \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^{q+1} y_j = 0.$$

On a donc

$$-y_{q+1} = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^q y_j.$$

En appliquant $(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2$, on a

$$(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(-y_{q+1}) = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^p (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(x_i) + \sum_{j=1}^q (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j).$$

On a d'un côté

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(x_i) &= (u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)(u(x_i) - \beta_{q+1}x_i) \\ &= (\alpha_i - \beta_{q+1})(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)(x_i) \\ &= (\alpha_i - \beta_{q+1})^2 x_i \end{aligned}$$

et d'un autre, notons $P_j = (X - \beta_j)^2$ pour chaque j : on a donc

$$P_j(u) \circ P_{q+1}(u)(y_j) = P_{q+1}(u)(P_j(u)(y_j)) = 0$$

donc $P_{q+1}(u)(y_j) \in \ker(P_j(u))$. Ainsi, on a la décomposition

$$0 = \sum_{i=1}^p \underbrace{(\alpha_i - \beta_{q+1})^2}_{\neq 0} x_i + \sum_{j=1}^q \underbrace{(u - \beta_{q+1} \text{Id}_E)^2(y_j)}_{\in \ker(P_j(u))}$$

dans la somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

Chap. :

- App Lin
- E.V.

ce qui entraîne que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0 ; \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, P_{q+1}(u)(y_j) = 0.$$

On en déduit que pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket, y_j \in \ker(P_{q+1}(u)) \cap \ker(P_j(u)) = \{0\}$ par la question 38.

Finalement,

$$0 = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^{q+1} y_j = y_{q+1}$$

donc on a la somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+1} \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$$

- Par le principe de récurrence, pour tout $q \in \mathbb{N}$ (on n'a pas besoin de E de dimension finie donc on ne limite pas le nombre de sous-espace),

la somme $\bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$ est directe.

41. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_q$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 0. \tag{1}$$

Chap. :
 • Pol
 • E.V.

Fixons $\ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$; on a

$$0 = P(\alpha_\ell) = (\alpha_\ell - \alpha_i) P_i(\alpha_\ell)$$

donc $P_i(\alpha_\ell) = 0$ si $i \neq \ell$. De même, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$0 = P(\alpha_\ell) = (\alpha_\ell - \beta_j) Q_j(\alpha_\ell) = (\alpha_\ell - \beta_j)^2 R_j(\alpha_\ell)$$

donc $Q_j(\alpha_\ell) = 0 ; R_j(\alpha_\ell) = 0$.

Ainsi, dans (1), en évaluant en α_ℓ ,

$$0 = \lambda_\ell P_\ell(\alpha_\ell) + \underbrace{\sum_{i=1, i \neq \ell}^p \lambda_i P_i(\alpha_\ell) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(\alpha_\ell) + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k(\alpha_\ell)}_{=0}$$

donc $\lambda_\ell P_\ell(\alpha_\ell) = 0$. Comme α_ℓ est racine simple de P , elle n'est pas racine de P_ℓ donc $\lambda_\ell = 0$. Ainsi, (1) se réécrit

$$\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 0.$$

Fixons cette fois-ci $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Alors de même, pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket, j \neq \ell$, on obtient

$$R_j(\beta_\ell) = 0, Q_j(\beta_\ell) = 0.$$

Par ailleurs, comme β_ℓ est racine d'ordre 2, $Q_\ell(\beta_\ell) = 0$ et $R_\ell(\beta_\ell) \neq 0$ donc dans (1), en évaluant en β_ℓ , comme avant

$$0 = \nu_\ell R_\ell(\beta_\ell)$$

et donc $\nu_\ell = 0$ et (1) se réécrit

$$\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j = 0.$$

Fixons encore $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Comme précédemment, Q_j admet β_ℓ comme racine d'ordre 2 pour $j \neq \ell$ et d'ordre 1 pour $j = \ell$. Soit donc S_j tel que $Q_j = (X - \beta_\ell)S_j$. Alors de

$$\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j = 0,$$

on a

$$\sum_{j=1}^q \mu_j S_j = 0.$$

En évaluant en β_ℓ , on a donc

$$\mu_\ell S_\ell(\beta_\ell) + \sum_{j=1, j \neq \ell}^q \mu_j S_j(\beta_\ell) = 0.$$

Comme $S_j(\beta_\ell) = 0$ pour $j \neq \ell$, on a donc $\underbrace{\mu_\ell S_\ell(\beta_\ell)}_{\neq 0} = 0$ donc $\mu_\ell = 0$.

Finalement, si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 0,$$

alors tous les scalaires sont nuls. On a donc la liberté de

$$(P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q).$$

C'est une famille libre à $p + 2q$ éléments. Comme P est de degré $p + 2q$, c'est une famille de polynômes dans $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ de dimension $p + 2q$.

Par cardinalité,

$$(P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q) \text{ est une base.}$$

42. Soit donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_q$ des scalaires tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k = 1.$$

Alors en évaluant en u ,

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u) + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k(u) = \text{Id}.$$

Soit donc $x \in E$. On a

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u)(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j (Q_j)(u)(x) + \sum_{k=1}^q \nu_k R_k(u)(x).$$

- Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Alors $(u - \alpha_i \text{Id}_E) \circ P_i(u)(x) = P(u)(x) = 0 : P_i(u)(x) \in \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$.
- Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Alors $(u - \beta_j \text{Id}_E) \circ Q_j(u)(x) = P(u)(x) = 0 : Q_j(u)(x) \in \ker(u - \beta_j \text{Id}_E) \subset \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$.
- Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Alors $(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 \circ R_j(u)(x) = P(u)(x) = 0 : R_j(u)(x) \in \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$.

Chap. :

- Pol
- E.V.
- PolEndo

On a donc $x \in \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a

$$E \subset \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2.$$

La réciproque étant claire,

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \ker(u - \alpha_i \text{Id}_E) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2.$$

43. On définit pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, q \rrbracket, v_i$ l'induit de u sur $\ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$ et w_j l'induit de u sur $\ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2 =: K_j$. Alors chaque v_i est une homothétie de rapport α_i et chaque $w_j - \beta_j \text{Id}_{K_j}$ est nilpotent d'indice 2. Pour ce dernier point, il suffit de vérifier que

$$\forall x \in \ker(u - \beta_j \text{Id}_E)^2, (w_j - \beta_j \text{Id}_{K_j})^2(x) = (u - \beta_j \text{Id}_E)^2(x) = 0.$$

- Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on peut donc considérer une base \mathcal{B}_i de $\ker(u - \alpha_i \text{Id}_E)$.
- Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Comme $w_j - \beta_j \text{Id}_{K_j}$ est nilpotent d'indice 2, par la question 36, c'est un endomorphisme de \mathcal{D} donc il existe une base \mathcal{C}_j telle que $\text{Mat}_{\mathcal{C}_j}(w_j - \beta_j \text{Id}_{K_j})$ soit de la forme de la question 35. Comme l'identité est invariante par changement de base, on en déduit que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}_j}(w_j) = \begin{pmatrix} \beta_j & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta_j & & & \\ & & & \beta_j I_2 + J & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \beta_j I_2 + J \end{pmatrix} \quad (2)$$

donc w_j est de la forme (ii).

Considérons donc $\mathcal{B} = \biguplus_{i=1}^p \mathcal{B}_i \uplus \biguplus_{j=1}^q \mathcal{C}_j$ qui est une base adaptée à la décomposition trouvée à la question précédente. Alors la matrice de u dans cette base est une matrice diagonale par blocs donc les blocs sont des matrices diagonales ou des matrices de la forme celle de (2).

Ainsi, quitte à réarranger les vecteurs de la base \mathcal{B} , on se ramène à (ii) et $u \in \mathcal{D}$.

FIN DU SUJET

Chap. :
 • App Lin
 • Mat App
 Lin
 • Red

Index des chapitres

Calculs algébriques (• Calcul)

- Q. 15, page 6
- Q. 6, page 3
- Q. 7, page 3

Applications linéaires (• App Lin)

- Q. 27, page 9
- Q. 29, page 10
- Q. 30, page 10
- Q. 33, page 11
- Q. 37, page 12
- Q. 39, page 13
- Q. 40, page 14
- Q. 43, page 17

Convexité (• Convexité)

- Q. 17, page 7

Dimension finie (• $\dim < \infty$)

- Q. 31, page 10
- Q. 33, page 11

Espace préhilbertiens réels (• EPR)

- Q. 13, page 5
- Q. 14, page 5

Espaces vectoriels (• E.V.)

- Q. 30, page 10
- Q. 34, page 11
- Q. 39, page 13
- Q. 40, page 14
- Q. 41, page 15
- Q. 42, page 16

Fonctions de la variable réelle (• Fonctions)

- Q. 10, page 4
- Q. 1, page 2
- Q. 20, page 8

Intégrales généralisées (• Int.)

- Q. 11, page 4
- Q. 9, page 4

Intégrales à paramètres : théorème de convergence dominée (• TCD)

- Q. 12, page 5
- Q. 8, page 4

Limites et continuité (• Limites)

- Q. 18, page 7
- Q. 20, page 8

Polynômes (• Pol)

- Q. 23, page 8
- Q. 37, page 12
- Q. 41, page 15
- Q. 42, page 16

Polynômes d'endomorphismes (• **PolEndo**)

- Q. 38, page 13
- Q. 42, page 16

Probabilités sur un univers fini (• **Proba Sup**)

- Q. 5, page 3

Représentation matricielle en algèbre linéaire (• **Mat App Lin**)

- Q. 21, page 8
- Q. 22, page 8
- Q. 23, page 8
- Q. 24, page 9
- Q. 25, page 9
- Q. 26, page 9
- Q. 27, page 9
- Q. 28, page 10
- Q. 32, page 11
- Q. 35, page 12
- Q. 37, page 12
- Q. 43, page 17

Réduction des endomorphismes (• **Red**)

- Q. 21, page 8
- Q. 25, page 9
- Q. 26, page 9
- Q. 27, page 9
- Q. 28, page 10
- Q. 39, page 13
- Q. 43, page 17

Séries entières (• **Sér. Ent.**)

- Q. 2, page 2

Variations aléatoires (Maths spé) (• **Var. Aléa Spé**)

- Q. 3, page 2

Variations aléatoires (Maths sup) (• **Var. Aléa Sup**)

- Q. 4, page 2