Optimal Sup-Spé
Groupe Ipesup · Le n°1 en Sup-Spé

Concours 2025

Centrale Maths 2 PC 2025

Corrigé du sujet

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur : contact@optimalsupspe.fr

Partie A : Etude du spectre de la matrice d'interaction

Partie 1 : Quelques inégalités générales

1. J_n est une matrice symétrique à coefficients réels, d'après le théorème spectrale, elle est donc diagonalisable.
2. Comme J_n est symétrique réelle donc diagonalisable, d'après le théorème spectrale il existe P une matrice orthogonale et D une matrice diagonale (avec $D = \text{diag}(\lambda_1; \ldots; \lambda_n)$) telles que :

$$J_n = P^\top DP$$

Soit X dans Λ^n on a alors :

$$X^\top J_n X = X^\top P^\top DPX = (PX)^\top D(PX)$$

Posons $Y = PX$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ on a alors :

$$X^\top J_n X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

Et donc :

$$\lambda_{\min} \times \|Y\|^2 \leq X^\top J_n X \leq \lambda_{\max} \times \|Y\|^2$$

De plus on vérifie facilement grâce à l'orthogonalité de P que $\|Y\|^2 = \|X\|^2$
Donc il suit que : $\lambda_{\min} \times \|X\|^2 \leq X^\top J_n X \leq \lambda_{\max} \times \|X\|^2$
Et puisque : $\|X\|^2 = n$, on obtient finalement le résultat suivant :

$$n\lambda_{\min} \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} J_n(i;j) x_j x_i \leq n\lambda_{\max}$$

3. Soit $x \in \Lambda^n$, comme $h \geq 0$ on a :

$$-n \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq n \;\Rightarrow\; -hn \leq -h\sum_{i=1}^{n} x_i \leq hn$$

Or puisque $\beta > 0$ le résultat précédent implique également que :

$$-\frac{\beta}{2} n\lambda_{\text{max}} \leq -\frac{\beta}{2} \sum_{1\leq i,j\leq n} J_n(i;j)x_j x_i \leq -\frac{\beta}{2} n\lambda_{\text{min}}$$

En sommant les deux inégalités on obtient :

$$n\Big(-h - \frac{\beta}{2}\lambda_{\text{max}}\Big) \leq H_n(h;x) \leq n\Big(h - \frac{\beta}{2}\lambda_{\text{min}}\Big)$$

4. Si J_n est en plus orthogonale alors ses valeurs propres sont -1 ou 1. Or on suppose que J_n n'est pas I ou $-I$ alors $\lambda_{\text{max}} = 1$ et $\lambda_{\text{min}} = -1$ et on en déduit dans ce cas l'encadrement suivant :

$$n\Big(-h - \frac{\beta}{2}\Big) \leq H_n(h;x) \leq n\Big(h + \frac{\beta}{2}\Big)$$

Partie 2 : Le modèle de Curie-Weiss

5. Définie ainsi U_n est la matrice carrée de taille n contenant que des 1. Elle est donc de rang 1 et on en déduit alors que la dimension de $\text{Ker}(U_n)$ est $n-1$ par le théorème du rang. Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$.

On constate par ailleurs que n est valeur propre car $U_n\mathbf{1} = n\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne de taille n composé que de 1. D'après notre remarque précédente on a alors que n est valeur propre de multiplicité 1. Donc on a

$$\text{Sp}(U_n) = \{0; n\}$$

De plus on a que :

$$J_n^{(C)} = \frac{1}{n}(U_n - I_n)$$

On vérifie facilement que si μ est valeur propre de U_n alors $\dfrac{1}{n}(\mu - 1)$ est valeur propre de $J_n^{(C)}$. En effet soit X un vecteur associé à la valeur propre μ on :

$$\frac{1}{n}(U_n - I_n)X = \frac{1}{n}(U_nX - I_nX) = \frac{1}{n}(\mu X - X) = \frac{1}{n}(\mu - 1)X$$

Les multiplicités sont conservées donc $-\dfrac{1}{n}$ est valeur propre de $J_n^{(C)}$ de multiplicité $n-1$ et $\dfrac{n-1}{n}$ est valeur propre de $J_n^{(C)}$ de multiplicité 1.

Partie 3 : Le modèle du sinus

6. Comme $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on peut appliquer la formule classique d'une somme géométrique en remarquant que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \cos(2kx) &= \mathcal{R}\Big(\sum_{k=1}^{p} (\mathrm{e}^{i2x})^k\Big) \\
&= \mathcal{R}\Big(\frac{1-\mathrm{e}^{i2x(p+1)}}{1-\mathrm{e}^{i2x}}\Big) \\
&= \mathcal{R}\Big(\mathrm{e}^{ipx}\frac{\sin\left((p+1)x\right)}{\sin x}\Big) \qquad \text{(en utilisant la factorisation par l'angle moitié et les formules d'Eu} \\
&= \frac{\cos(px)\sin\left((p+1)x\right)}{\sin x}
\end{aligned}$$

Or en utilisant la formule du produit suivante :

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$$

Il vient que :

$$\sin\left((p+1)x\right)\cos(px) = \frac{\sin\left((2p+1)x\right)-\sin x}{2}$$

Donc on obtient bien :

$$\sum_{k=1}^{p} \cos(2kx) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin\left((2p+1)x\right)}{\sin x} - 1\Big)$$

7. La symétrie est évidente car $ij = ji$. Montrons maintenant que $J_n^{(S)}$ est orthogonale, i.e. que $J_n^{(S)}(J_n^{(S)})^\top = I_n$. On a pour tout couple $(i;j)$:

$$\begin{aligned}
J_n^{(S)}(J_n^{(S)})^\top(i;j) &= \sum_{k=1}^{n} J_n^{(S)}(i;k)(J_n^{(S)})^\top(k;j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} J_n^{(S)}(i;k)J_n^{(S)}(j;k) \\
&= \frac{4}{2n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi ik}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi jk}{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

En utilisant cette fois :

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

On obtient que :

$$J_n^{(S)}(J_n^{(S)})^\top(i;j) = \frac{2}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2k\Big(\frac{\pi(i-j)}{2n+1}\Big)\right) - \sum_{k=1}^{n}\cos\left(2k\Big(\frac{\pi(i+j)}{2n+1}\Big)\right)\right)$$

Si $i = j$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2k\Big(\frac{\pi(i-j)}{2n+1}\Big)\right) = n$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(2k\Big(\frac{\pi(i+j)}{2n+1}\Big)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\pi i)}{\sin(\frac{2\pi i}{2n+1})} - 1\right] = -\frac{1}{2} \qquad \text{(d'après le résultat de la question précédente)}$$

Donc si $i = j$ on a :

$$J_n^{(S)}(J_n^{(S)})^\top(i;j) = \frac{2}{2n+1}\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = 1$$

Si $i \neq j$ on reprend le calcul précédent et :

$$\begin{aligned}
J_n^{(S)}(J_n^{(S)})^\top(i;j) &= \frac{2}{2n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \cos\Big(2k(\frac{\pi(i-j)}{2n+1})\Big) - \sum_{k=1}^{n} \cos\Big(2k(\frac{\pi(i+j)}{2n+1})\Big)\right) \\
&= \frac{2}{2n+1} \times \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\big((i-j)\pi\big)}{\sin\Big(\frac{(i-j)\pi}{2n+1}\Big)} - \frac{\sin\big((i+j)\pi\big)}{\sin\Big(\frac{(i+j)\pi}{2n+1}\Big)}\right]
\end{aligned}$$

Or $\sin\big((i-j)\pi\big) = \sin\big((i+j)\pi\big) = 0$ donc on a démontré le résultat.

Partie 4 : Modèle d'Ising unidimensionnel

8. On a d'après la définition :

$$C_{9,1} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

et

$$C_{9,8} = \begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

Donc :

$$J_9^{(1)} = \begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

On reconnait bien la matrice d'adjacence du graphe donné dans l'énoncé (le tore discret unidimensionnel à 9 sommets) ou chaque particule est en intéraction avec son plus proche voisin.

9.
```
def mat_adj(graphe):
n = len(graphe)
mat = [[0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
for i in graphe:
    for j in graphe[i]:
        mat[i][j] = 1
        mat[j][i] = 1
return mat
```

10. Raisonnons par récurrence. L'initialisation de cette propriété est triviale, supposons maintenant que il existe k dans $[\![1;n-1]\!]$ tel que $C_{n,1}^k = C_{n,k}$ on a alors :

$$C_{n,1}^{k+1} = C_{n,1}C_{n,1}^k = C_{n,1}C_{n,k} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}$$

Or pour tout $(i;j) \in [\![1;n]\!]^2$ on a :

$$(C_{n,1}C_{n,k})(i;j) = \sum_{l=1}^{n} C_{n,1}(i;l)C_{n,k}(l;j)$$

Or en considérant $C_{n,1}(i;l)$ on remarque que les seuls termes éventuellement non nuls de cette somme sont ceux pour $l = i-1$ (si $i \geq 2$) ou $l = n$ (si $i = 1$). On obtient alors :

$$(C_{n,1}C_{n,k})(i;j) = C_{n,k}(i-1;j)\mathbf{1}_{\{i\geq 2\}} + C_{n,k}(n;j)\mathbf{1}_{\{i=1\}}$$

Or, définition de $C_{n,k}$ on constate que $C_{n,k}(n;j)\mathbf{1}_{\{i=1\}} = 0$ et que $C_{n,k}(i-1;j) = C_{n,k+1}(i;j)$

On a donc bien : $C_{n,1}^{k+1} = C_{n,k+1}$, cela achève le raisonnement par récurrence.

11. En appliquant le résultat précédent à $k = n$ on obtient alors :

$$C_{n,1}^n = C_{n,n} = I_n$$

Donc $X^n - 1$ est un polynome annulateur de $C_{n,1}$. Donc $\mathrm{Sp}(C_{n,1}) \subset \mathbb{U}_n$

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$. Posons $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$ De plus pour $\omega^k \in \mathbb{U}_n$ on vérifie facilement en résolvant le système associé que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-k} \\ \omega^{-2k} \\ \vdots \\ \omega^{-(n-1)k} \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de $C_{n,1}$ associé à la valeur propre ω^k donc on a bien $\mathrm{Sp}(C_{n,1}) = \mathbb{U}_n$

12. D'après la formule de la question 10. on a : $C_{n,n-1} = C_{n,1}^{n-1}$ et que $C_{n,1}C_{n,1}^{n-1} = C_{n,1}^n = I_n$. Donc $C_{n,1}$ est inversible et $C_{n,1}^{-1} = C_{n,1}^{n-1}$. Ainsi on a :

$$J_n = C_{n,1} + C_{n,1}^{-1}$$

Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$, on remarque que si X est un vecteur propre de $C_{n,1}$ associé à ω^k on a alors $C_{n,1}X = \omega^k X$ et donc $C_{n,1}^{-1}X = \omega^{-k}X$. Donc X est également vecteur propre de $C_{n,1}^{-1}$ associé à la valeur propre ω^{-k}.

Ainsi en considérant un tel vecteur propre X on obtient que :

$$J_nX = C_{n,1}X + C_{n,1}^{-1}X = \omega^k X + \omega^{-k}X = (\omega^k + \omega^{-k})X$$

Or $\omega^k + \omega^{-k} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
Ainsi pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

est valeur propre de J_n avec multiplicité 1

Partie 5 : Modèle d'Ising bidimensionnel

13. Montrons la linéarité par rapport à la première variable. Considérons les matrices A_1 et A_2 dans $\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et B dans $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$. On a pour tout $(i;j) \in [\![1;u]\!] \times [\![1;v]\!]$:

$$(a_1(i;j) + \lambda a_2(i;j))B = a_1(i;j)B + \lambda a_2(i;j)B$$

Donc il y a bien linéarité par rapport à la première variable. De même si on prend cette fois B_1 et B_2 dans $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ alors pour tout $(i;j) \in [\![1;u]\!] \times [\![1;v]\!]$ on a :

$$a(i;j)(B_1 + \lambda B_2) = a(i;j)B_1 + \lambda a(i;j)B_2$$

On a bien la linéarité par rapport à la seconde variable.
Donc $\otimes$ est bien bilinéaire.

14. Calculons le bloc de coordonnées $(i;k) \in [\![1;u]\!] \times [\![1;w]\!]$ de $(A \otimes B)(A' \otimes B')$ on a :

$$\Big[(A \otimes B)(A' \otimes B')\Big]_{i,k} = \sum_{j=1}^{v} (a_{i,j}B)(a'_{j,k}B') = \Big(\sum_{j=1}^{v} a_{i,j}a'_{j,k}\Big)BB' = (AA')_{i,k}BB'$$

Donc on a bien $(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'$

15. D'après la question 14. on déduit le calcul suivant si A et B sont deux matrices inversibles :

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = AA^{-1} \otimes BB^{-1} = I \otimes I = I$$

Donc : $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$
Donc en supposant A et B diagonalisable il existe donc P et Q inversibles et D_1 et D_2 diagonales telles que :

$$A = PD_1P^{-1} \qquad B = QD_2Q^{-1}$$

Ainsi encore par la question 14. on a :

$$A \otimes B = (PD_1P^{-1} \otimes QD_2Q^{-1}) = (P \otimes Q)(D_1 \otimes D_2)(P^{-1} \otimes Q^{-1})$$

Donc grâce au résultat précédent il vient :

$$A \otimes B = (P \otimes Q)(D_1 \otimes D_2)(P \otimes Q)^{-1}$$

On remarque que $D_1 \otimes D_2$ est diagonale et les coefficients de cette matrice sont les $\lambda\mu$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$.
Donc $A \otimes B$ est diagonalisable et

$$\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \,\text{et}\, \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$$

16. On construit tranquillement la matrice $I_3 \otimes J_3^{(1)}$ avec $J_3^{(1)}$ en utilisant la définition du produit de Kronecker il vient alors :

$$I_3 \otimes J_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et de même :

$$J_3^{(1)} \otimes I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc on obtient en additionnant les deux matrices ci-dessus la matrice d'adjacence du graphe proposé (le tore bidimentionnel discret à 9 sommets).

17. Notons que déjà que $J_N^{(2)}$ est inversible car symétrique réelle. Posons k et j dans $[\![1;n]\!]$
Soit u_k et u_j deux vecteurs propres de de $J_n^{(1)}$ (on sait également que c'est une matrice diagonalisable pour les mêmes raisons) associés respectivement aux valeurs propres λ_k et λ_j.

En utilisant la question 14. on a d'une part que :

$$(I_n \otimes J_n^{(1)})(u_k \otimes u_j) = u_k \otimes (\lambda_j u_j) = \lambda_j (u_k \otimes u_j) \quad \text{(par bilinéarité de } \otimes)$$

D'autre part :

$$(J_n^{(1)} \otimes I_n)(u_k \otimes u_j) = (\lambda_k u_k) \otimes (u_j) = \lambda_k (u_k \otimes u_j) \quad \text{(par bilinéarité de } \otimes)$$

Donc en sommant on obtient que :

$$J_N^{(2)}(u_k \otimes u_j) = (\lambda_j + \lambda_k)(u_k \otimes u_j)$$

Ainsi les $\lambda_j + \lambda_k$ sont bien les valeurs propres de $J_N^{(2)}$

Partie B : Etude de la convergence de la magnétisation

Partie 1 : Magnétisation spontanée

18. Les sommes étant finies, il n'y a pas de problème de dérivabilité par rapport à la variable h ou d'inversion de symbole Σ et $\dfrac{\partial}{\partial h}$, en particulier ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus on a :

$$\frac{\partial}{\partial h}\Big(H_n(h;y)\Big) = -\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Par suite il vient :

$$\frac{\partial}{\partial h}\Big(Z_n(h)\Big) = \frac{\partial}{\partial h}\Big(\sum_{y\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h;y)}\Big) = \sum_{y\in\Lambda_n} \frac{\partial}{\partial h}\Big(\mathrm{e}^{-H_n(h;y)}\Big) = \sum_{y\in\Lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\mathrm{e}^{-H_n(h;y)}$$

Finalement on obtient la formule suivante pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$Z_n'(h) = \sum_{y\in\Lambda_n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) Z_n(h)\mathbb{P}(X_{n,1} = y_1; \dots ; X_{n,n} = y_n)$$

Ainsi on a alors pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi'(h) = \frac{1}{n}\frac{Z_n'(h)}{Z_n(h)} = \sum_{y\in\Lambda_n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\mathbb{P}(X_{n,1} = y_1; \dots ; X_{n,n} = y_n)$$

Donc par théorème de transfert on reconnait que pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi'(h) = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}\Big] = \mathbb{E}[M_{n,h}] = m_n(h)$$

Partie 2 : Le modèle d'Ising

19. On suppose ici que $J_n = J_n^{(1)}$ donc il vient que pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$H_n(h;x) = -\frac{\beta}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n} J_n^{(1)}(i;j)x_i x_j - h\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Or d'après la matrice d'interaction du modèle d'Ising en dimension 1 comme chaque interaction entre plus proche voisin est comptée deux fois dans la double somme on a :

$$\sum_{1\leq i;j\leq n} J_n^{(1)}(i;j)x_i x_j = 2\sum_{i\sim j} x_i x_j$$

Donc avec la convention $x_{n+1} = x_1$ on a bien :

$$\sum_{1\leq i;j\leq n} J_n^{(1)}(i;j)x_i x_j = 2\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}$$

Donc pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$Z_n(h) = \sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h;x)} = \sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{\beta\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} + h\sum_{i=1}^{n} x_i} = \sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}(\beta x_i x_{i+1} + h x_i)}$$

Ainsi pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$Z_n(h) = \sum_{x\in\Lambda_n}\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(\beta x_i x_{i+1} + h x_i)}$$

20. Le résultat est immédiat en itérant la formule d'un produit matriciel.

21. Remarquons que la matrice A encode les différentes configurations possibles des spins de x_i et x_{i+1}. Mettons dans la première ligne la configuration $x_i = 1$, sur la deuxième ligne $x_i = -1$ puis la première colonne $x_{i+1} = -1$ et enfin la deuxième colonne $x_{i+1} = 1$, avec $A(x_i; x_{i+1}) = \mathrm{e}^{(\beta x_i x_{i+1} + h x_i)}$, on obtient bien :
$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\beta - h} & \mathrm{e}^{-\beta - h} \\ \mathrm{e}^{-\beta + h} & \mathrm{e}^{\beta + h} \end{pmatrix}$$
On a par définition :
$$\mathrm{tr}(A^n) = \sum_{i=1}^{2} a_{i,i}^n$$
Or d'après la question 20, on a :
$$a_{i,i}^n = \sum_{(k_2,\dots,k_n) \in \{1;2\}^{n-1}} a_{i,k_2} \dots a_{i,k_n}$$
Ou encore en sommant sur les configurations de spins et non les positions des coefficients de la matrice A on obtient :
$$\mathrm{tr}(A^n) = \sum_{x_1 \in \{-1;1\}} \sum_{(x_2,\dots,x_n) \in \{-1;1\}^{n-1}} A(x_1;x_2)\dots A(x_n;x_1) = \sum_{x \in \Lambda_n} A(x_1;x_2)\dots A(x_n;x_1) = Z_n(h)$$

22. On a en calculant directement l'expression du polynôme caractéristique de A, comme c'est une matrice 2×2 :
$$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$$
Donc on obtient que :
$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$$
Or :
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{e}^{\beta}(\mathrm{e}^{-h} + \mathrm{e}^{h}) = 2\mathrm{e}^{\beta} \cosh(h)$$
Et :
$$\det(A) = \mathrm{e}^{2\beta} - \mathrm{e}^{-2\beta} = 2\sinh(2\beta)$$
On en déduit alors que λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de A avec :
$$\lambda_1 = \mathrm{e}^{\beta}\cosh(h) - \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}(\cosh(h))^2 - 2\sinh(2\beta)}$$
$$\lambda_2 = \mathrm{e}^{\beta}\cosh(h) + \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}(\cosh(h))^2 - 2\sinh(2\beta)}$$

23. Soit $h \in \mathbb{R}_+$, on a d'après les questions précédentes que :
$$\psi_n(h) = \frac{1}{n}\ln(Z_n(h)) = \frac{1}{n}\ln(\mathrm{tr}(A^n))$$
Notons que A est inversible d'après nos calculs précédents et par récurrence immédiate, A^n est semblable à une matrice diagonale avec λ_1^n et λ_2^n sur sa diagonale. Donc par invariance par similitude de la trace on a :
$$\mathrm{tr}(A^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n$$

Ainsi :

$$\psi_n(h) = \frac{1}{n}\ln(\mathrm{tr}(A^n)) = \frac{1}{n}\ln(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = \frac{1}{n}\ln(\lambda_2^n) + \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1\Big) = \ln(\lambda_2) + \ln\Big(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1\Big)$$

Or :

$$\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Finalement on a bien :

$$\psi_n(h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\Big(\mathrm{e}^{\beta}\cosh(h) + \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}(\cosh(h))^2 - 2\sinh(2\beta)}\Big)$$

24. D'après la question précédente on a donc pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi(h) = \ln\Big(\mathrm{e}^{\beta}\cosh(h) + \sqrt{\mathrm{e}^{2\beta}(\cosh(h))^2 - 2\sinh(2\beta)}\Big)$$

Comme on a pour tout $h \in \mathbb{R}_+$:

$$\cosh(h) \geq 1 \quad \text{et} \quad \sinh(2\beta) < \mathrm{e}^{2\beta} \qquad \text{alors} \qquad \mathrm{e}^{2\beta}(\cosh(h))^2 - 2\sinh(2\beta) > 0$$

On vérifie ensuite facilement que ψ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $m = \psi'$ De plus, on remarque que ψ est paire sur $\mathbb{R}$ donc $\psi'(0) = 0$ et par suite : $m_+ = 0$

Partie 3 : Le modèle de Curie-Weiss

25. D'après la matrice d'interaction du modèle de Curie-Weiss on a :

$$-H_n(h;x) = \frac{\beta}{2}\sum_{\substack{1\leq i;j\leq n\\ i\neq j}} \frac{x_i x_j}{n} + h\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Or :

$$\sum_{\substack{1\leq i;j\leq n\\ i\neq j}} \frac{x_i x_j}{n} = \frac{1}{n}\Big[\sum_{1\leq i;j\leq n} x_i x_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big] = \frac{1}{n}\Big[s_n(x)^2 - n\Big] \quad \text{car } x_i \in \{-1;1\}$$

Ainsi en remplaçant on a bien :

$$Z_n(h) = \sum_{x\in\Lambda_n} \mathrm{e}^{-H_n(h;x)} = \sum_{x\in\Lambda_n} \exp\Big(\frac{\beta}{2n}\Big[s_n(x)^2 - n\Big] + hs_n(x)\Big)$$

On obtient bien le résultat en factorisant.

26. Par parité de l'intégrande, cela revient à montrer que $\int_0^{+\infty}\exp(\frac{-x^2}{2})\mathrm{d}x$ converge et par continuité de l'intégrande cela revient à montrer que $\int_1^{+\infty}\exp(\frac{-x^2}{2})\mathrm{d}x$. Il suffit maintenant de remarquer que :

$$x^2\exp(\frac{-x^2}{2}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissance comparée)}$$

Donc :

$$\exp(\frac{-x^2}{2}) =_{+\infty} o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

Et on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente d'ou la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(\frac{-x^2}{2})\mathrm{d}x$

27. On remarque que montrer le résultat revient à démontrer l'égalité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}u\right)^2}{2}\right]\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi a}$$

Or cette dernière égalité est triviale en utilisant le résultat de la question précédente et le changement de variable affine suivant : $x = \dfrac{t}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}u$

28. On a donc en appliquant le résultat ci-dessus que :

$$\exp\left(\frac{\beta}{2n}(s_n(x))^2\right) = \sqrt{\frac{n}{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{s_n(x)t - \frac{nt^2}{2\beta}}\,\mathrm{d}t$$

Donc il vient :

$$Z_n(h) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}} \sum_{x\in\Lambda_n} \sqrt{\frac{n}{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{s_n(x)(t+h) - \frac{nt^2}{2\beta}}\,\mathrm{d}t$$

Toutes les quantités ici étant positives on peut d'après le théorème de Fubini-Tonelli inverser la somme et l'intégrale et on obtient alors directement le résultat voulu en factorisant la somme.

29. On a que :

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(t+h)x_i} &= \sum_{x_1\in\{-1;1\}} \sum_{x_2\in\{-1;1\}} \cdots \sum_{x_n\in\{-1;1\}} \mathrm{e}^{(t+h)x_1}\mathrm{e}^{(t+h)x_2}\ldots\mathrm{e}^{(t+h)x_n} \\
&= \sum_{x_1\in\{-1;1\}} \mathrm{e}^{(t+h)x_1} \sum_{x_2\in\{-1;1\}} \mathrm{e}^{(t+h)x_2} \ldots \sum_{x_n\in\{-1;1\}} \mathrm{e}^{(t+h)x_n} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{x_i\in\{-1;1\}} \mathrm{e}^{(t+h)x_i}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-(t+h)} + \mathrm{e}^{(t+h)}\right) = \prod_{i=1}^{n} (2\cosh(t+h))
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{x\in\Lambda_n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(t+h)x_i} = (2\cosh(t+h))^n$$

30. D'une part on a :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{(t+h)x_i} = \mathrm{e}^{(t+h)s_n(x)}$$

Donc d'après le résultat précédent il vient :

$$Z_n(h) = \sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}^{\beta}\pi\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\cosh(t+h))^n \mathrm{e}^{\frac{-nt^2}{2\beta}}\,\mathrm{d}t$$

Donc en posant le changement de variable $x = t+h$ puis en écrivant :

$$(2\cosh(x))^n = \exp\left(n\ln(2\cosh(x))\right)$$

On en déduit ensuite le résultat.

31. On a que G_h est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$G_h'(x) = \frac{(x-h)}{\beta} - \tanh(x)$$

Et :

$$G_h''(x) = \frac{1}{\beta} - \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{(\cosh(x))^2}$$

Par continuité de G_h' sur $\mathbb{R}_+$ comme $G_h'(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} G_h'(x) = +\infty$ on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins une valeur d'annulation de G_h' donc un extremum local. Comme $\cosh \geq 1$, si $\beta \leq 1$ on a que $G_h'' > 0$ donc G_h est strictement convexe et ainsi il ne peut y avoir qu'un unique minimum.

Si $\beta > 1$ alors $G_h'' < 0$ sur $[\,0; \operatorname{arccosh}(\sqrt{\beta})\,]$ et $G_h'' > 0$ sur $[\operatorname{arccosh}(\sqrt{\beta})\,; +\infty[$. De plus comme $G_h'(0) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} G_h'(x) = +\infty$, G_h' n'admet qu'un point d'annulation que sur l'intervalle $[\operatorname{arccosh}(\sqrt{\beta})\,; +\infty[$, intervalle sur lequel G_h est également convexe donc cet extremum est unique et est un minimum.

Si $\beta \leq 1$ et $h = 0$ alors $G_h'(0) = 0$ puisque $\tanh(0) = 0$ et par unicité de l'extremum acquise au paragraphe précédent on conclut que $u_h = 0$.

Si $\beta > 1$ on a vu que $u_h \geq \operatorname{arccosh}(\sqrt{\beta}) > 0$ donc $u_h > 0$.

De plus u_h étant un mimimum local il est évident que $G_h'(u_h) = 0$.

De plus on a :

$$G_0'(x) = \frac{x}{\beta} - \tanh(x) = G_h'(x) + \frac{h}{\beta}$$

Donc en appliquant cette relation à $x = u_h$ on obtient :

$$G_0'(u_h) = \frac{h}{\beta}$$

On en déduit immédiatement le résultat.

On a vu précédement qu'au voisinage de u_h, G_h est convexe d'ou le résultat.

32. On vérifie facilement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} G_h(x) = +\infty$, de plus elle admet un minimum d'après la question précédente et un minimum global par continuité. De plus on vérifie facilement que G_h' ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$, en u_h donc u_h est bien le minimiseur global de G_h

33. Par définition de ψ_n on a :

$$\begin{aligned}
\psi_n(h) &= \frac{1}{n} \ln\Big(Z_n(h)\Big) \\
&= \frac{1}{n} \ln\left(\sqrt{\frac{n}{2\mathrm{e}^\beta \pi \beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nG_h(x)} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2n}\Big(\ln(n) - \ln(2\mathrm{e}^\beta \pi \beta)\Big) + \frac{1}{n} \ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nG_h(x)} \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

De plus on a que :

$$\widehat{G}_h(x) = G_h(x + u_h) - G_h(u_h) \iff G_h(x) = \widehat{G}_h(x - u_h) + G_h(u_h)$$

Ainsi en remplaçant on a :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nG_h(x)}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n(\widehat{G}_h(x-u_h)+G_h(u_h))}\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-nG_h(u_h)}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(x-u_h)}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nG_h(x)}\mathrm{d}x\right) = -G_h(u_h) + \frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(x-u_h)}\mathrm{d}x\right)$$

Reste à poser le changement de variable affine suivant :

$$x - u_h = \frac{t}{\sqrt{n}}$$

Ce qui ammène $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}t$ et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(x-u_h)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t$$

Et :

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t\right) = \frac{-1}{2n}\ln(n) + \frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t\right)$$

Ainsi on en déduit l'égalité voulue.

34. On a que G_h est C^2 donc en utilisant un développement de Taylor au voisinage de u_h on a pour $x > 0$ assez petit :

$$G_h(u_h + x) = G_h(u_h) + G_h'(u_h)x + \frac{G_h''(u_h)}{2}x^2 + o(x^2) \iff \widehat{G}_h(x) = \frac{G_h''(u_h)}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi il vient que :

$$\frac{\widehat{G}_h(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}G_h''(u_h) = \frac{\gamma_h}{2}$$

Ainsi f_h est bien prolongeable par continuité en posant $f_h(0) = \dfrac{\gamma_h}{2}$

35. On a que f_h est strictement positive sur $\mathbb{R}$, car $\widehat{G}_h$ l'est par construction et car $f_h(0) = \dfrac{\gamma_h}{2} = \dfrac{G_h''(u_h)}{2} > 0$. Remarquons donc également que f_h est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes sur tout compact de la forme $[-M; M]$, de plus on prouve facilement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty} G_h(x) = +\infty$, donc il existe bien un minimum global à f_h qui est strictement positif.

36. On a en effectuant un changement de variable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(x)}\mathrm{d}x$$

On a que $-\widehat{G}_h$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}$ en u_h et que $-\widehat{G}_h''(u_h) < 0$ donc par la méthode de Laplace on déduit :

$$\sqrt{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(x)}\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n\widehat{G}_h''(u_h)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_h}}$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_h}}$$

Or on avait :

$$\psi_n(h) = -G_h(u_h) - \frac{1}{2n}\ln(2\mathrm{e}^{\beta}\pi\beta) + \frac{1}{n}\ln\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\widehat{G}_h(\frac{t}{\sqrt{n}})}\mathrm{d}t\right)$$

Puisque $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n}$ tendent vers 0 en $+\infty$ par passage à la limite on conclut que :

$$\psi_n(h) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -G_h(u_h)$$

37. On a déjà montré que G_0' était strictement croissance sur $[0;+\infty[$ (ou $[\operatorname{arccosh}(\sqrt{\beta})\,;+\infty[$, avec u_h sur cet intervalle). De plus G_0' est continue donc dans les deux cas elle réalise une bjection de $[u_h;+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$ car on avait $\lim\limits_{x\to+\infty} G_0'(x) = +\infty$

De plus en réutilisant la relation suivante :

$$G_0'(u_h) = \frac{h}{\beta}$$

On obtient :

$$u_h = G_0^{-1}\Big(\frac{h}{\beta}\Big)$$

Ainsi comme G_0^{-1} et $h \mapsto \frac{h}{\beta}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ on a que $h \mapsto u_h$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

38. ψ est dérivable comme composée de fonctions dérivables et on a :

$$\psi(h) = -G_h(u_h)$$

Or

$$\frac{\partial G_h}{\partial h}(x) = -\frac{x-h}{\beta}$$

Donc

$$\frac{\partial \psi}{\partial h}(h) = -\frac{\partial G_h}{\partial h}(u_h) = \frac{u(h)-h}{\beta}$$

Ainsi :

$$\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad m(h) = \frac{u(h)-h}{\beta}$$

39. D'après les notations du sujet, on a :

$$m_+ = \frac{u_0}{\beta} \quad \text{avec} \quad u_0 = \lim_{h\to 0} u(h)$$

Comme $u(h)$ est le minimum globale de G_h en considérant sa dérivée on a alors que :

$$G_h'(u(h)) = 0 \iff u(h) = h + \beta\tanh(u(h))$$

Donc les fonctions étant continues en passant à la limite lorsque h tend vers 0 on obtient :

$$u_0 = \beta\tanh(u_0)$$

Or l'équation $x = \beta\tanh(x)$ admet une unique solution $x = 0$ si $\beta \leq 1$ et une unique solution strictement positive si $\beta > 1$, on a donc bien démontré le résultat.

Partie 4 : Convergence en loi pour la loi de Curie-Weiss au point critique

40. f est bornée donc il existe $C \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq C$$

Donc par inégalité triangulaire :

$$|E_{n,f}| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{1}{4}} M_n\right)\right) \frac{\exp(\frac{-t^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}\right| \mathrm{d}t \leq \int_{-\infty}^{+\infty} C \frac{\exp(\frac{-t^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}t \leq C \quad \text{(d'après q.26)}$$

On a donc bien l'existence de $E_{n,f}$

41. Supposons f K-lipschitzienne et bornée alors pour tout t on a :

$$\left|f\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{4}}} + n^{\frac{1}{4}} M_n\right) - f\left(n^{\frac{1}{4}} M_n\right)\right| \leq K \frac{|t|}{n^{\frac{1}{4}}}$$

Donc en passant à l'espérance et puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\frac{-t^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}t = 1$ on a :

$$\left|E_{n,f} - \mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}} M_n\right)\right)\right| \leq \frac{K}{n^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{K}{n^{\frac{1}{4}}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc d'après les hypthèses de l'énoncé

$$\mathbb{E}\left(f\left(n^{\frac{1}{4}} M_n\right)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \varphi_\infty(u) \mathrm{d}u$$

42. Sur $]-\infty; x]$ sur $]x; x + \frac{1}{k}]$ et sur $]x + \frac{1}{k}; +\infty[$ la fonction f_k est clairement k-lipschitzienne car constante ou de pente égale à $-k$. De plus si u et v sont pris dans des intervalles sur lesquels l'expression de f_k reste à vérifier que l'on a :

$$|f_k(u) - f_k(v)| \leq k|u - v|$$

Faisons par exemple l'un des trois cas à tester (les autres n'étant pas plus difficiles) : $u \leq x$ et $v \in]x; x + \frac{1}{k}]$ on a :

$$|f(u) - f(v)| = |k(v - x)| = k|v - x| \leq k|v - u|$$

43. Remarquons que :

$$\mathbf{1}_{u \leq x} \leq f_k(u) \leq \mathbf{1}_{u \leq x + \frac{1}{k}}$$

Donc appliquant à $u = n^{\frac{1}{4}} M_n$ et en composant par l'espérance on a :

$$\mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x) \leq \mathbb{E}(f_k(n^{\frac{1}{4}} M_n)) \leq \mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x + \frac{1}{k})$$

De plus d'après les questions précédentes on a comme f_k k-lipschitzienne, continue et bornée il vient :

$$\mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x) \leq \mathbb{E}(f_k(n^{\frac{1}{4}} M_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(u) \varphi_\infty(u) \mathrm{d}u \leq \int_{-\infty}^{x + \frac{1}{k}} \varphi_\infty(u) \mathrm{d}u$$

Or pour n assez grand comme on a la convergence du milieu l'écart peut être controlé par $\frac{\varepsilon}{2}$ d'ou le résultat en fixant un ε.

44. Par continuité de φ_∞ on a pour k assez grand :

$$\int_{-\infty}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u \leq \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc finalement pour n assez grand et k assez grand :

$$\mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x) \leq \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u + \varepsilon$$

En raisonnant comme à la question précédente on montre également que :

$$\mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x) \geq \int_{-\infty}^{x-\frac{1}{k}} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u - \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc il vient pour n assez grand :

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u - \varepsilon \leq \mathbb{P}(n^{\frac{1}{4}} M_n \leq x) \leq \int_{-\infty}^{x} \varphi_\infty(u)\mathrm{d}u + \varepsilon$$

Cela démontre bien la convergence en loi.

***

FIN DU SUJET