Préliminaires

Maths Sup - Concours scientifiques

Fiches de cours

- Raisonnement et vocabulaire ensembliste
- Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Fiche de méthodes

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

Maths Sup - Concours scientifiques

Dans toute la suite, E désigne un ensemble.

1 Rudiments de logique

Définition : Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui est soit vrai (V), soit faux (F).

Définition : Soit $P(x)$, une proposition dépendant d'un paramètre $x \in E$. On appelle quantificateur universel, noté $\forall$ – lire « pour tout » ou « quel que soit » –, le symbole permettant de signifier que la propriété $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$. On écrit

$$\forall x \in E, P(x).$$

Définition : Soit $P(x)$, une proposition dépendant d'un paramètre $x \in E$. On appelle quantificateur existentiel, noté $\exists$ – lire « il existe » –, le symbole permettant de signifier qu'il existe un $x \in E$ tel que la propriété $P(x)$ soit vraie. On écrit

$$\exists x \in E, P(x).$$

Lorsque l'élément $x \in E$ est unique, on peut le signaler en écrivant « $\exists! x \in E$ ».

Définition : Soit P, une proposition. La négation de cette proposition notée $\neg P$ est la proposition qui est vraie lorsque P est fausse, fausse lorsque P est vraie. La table de vérité est

P	$\neg$P
V	F
F	V

Définition : Soit P, Q, deux propositions. La conjonction de P et Q notée P et Q ou $P \wedge Q$ est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont vraies, fausse sinon. La table de vérité est

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition : Soit P, Q, deux propositions. La disjonction de P et Q notée P ou Q ou $P \vee Q$ est la proposition qui est fausse lorsque P et Q sont fausses, vraie sinon. La table de vérité est

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition : Soit P, Q, deux propositions. L'implication de P entraîne Q notée $P \Longrightarrow Q$ est la proposition $(\neg P)$ ou Q. La proposition $P \Longrightarrow Q$ se lit « P implique Q », ou « si P, alors Q ». La table de vérité est

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition : Soit P, Q, deux propositions. L'équivalence entre P et Q notée $P \Longleftrightarrow Q$ est la proposition $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$. La proposition $P \Longleftrightarrow Q$ se lit « P est équivalente à Q », ou « P si, et seulement si Q ». La table de vérité est

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Définition : Soit P, Q, deux propositions. La contraposée de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est la proposition $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

Attention : Les symboles $\forall, \exists, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \neg$ sont des symboles mathématiques, et non pas des abréviations.

Règles de calculs

Proposition : Soit P, Q, R, trois propositions.

- P ou Q $\Longleftrightarrow$ Q ou P.
- (P ou Q) ou R $\Longleftrightarrow$ P ou (Q ou R).
- P et Q $\Longleftrightarrow$ Q et P.
- (P et Q) et R $\Longleftrightarrow$ P et (Q et R).
- P et (Q ou R) $\Longleftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R).
- P ou (Q et R) $\Longleftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R).
- $\neg(\neg P) \Longleftrightarrow P$.
- $\neg$(P et Q) = $(\neg P)$ ou $(\neg Q)$.
- $\neg$(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ $(\neg P)$ et $(\neg Q)$.
- $\neg(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow$ P et $(\neg Q)$.

Proposition : Soit $P(x)$, une proposition. Alors

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x)$$

et

$$\neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \neg P(x).$$

Théorème (Disjonction de cas). Soit P, Q, deux propositions. Alors

$$(Q \implies P) \text{ et } (\neg Q \implies P) \implies P.$$

Proposition (Contraposition) : Soit P, Q, deux propositions. On a

$$(P \implies Q) \iff ((\neg Q) \implies \neg P).$$

Théorème (Absurde) : Soit P, Q, deux propositions. Alors

$$((\neg P) \implies Q) \text{ et } ((\neg P) \implies (\neg Q)) \implies P.$$

Définition : Soit P, une proposition. Q est dite condition nécessaire de P si $P \implies Q$.

Définition : Soit P, une proposition. Q est dite condition suffisante de P si $Q \implies P$.

Définition : Soit P, une proposition. Q est donc une condition nécessaire et suffisante de P (abrégée CNS) lorsque $Q \iff P$.

Remarque : La méthode de l'analyse-synthèse consiste en fait à trouver une condition nécessaire, puis se rendre compte qu'elle est suffisante.

Théorème (admis) : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Théorème (Récurrence) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit E, une partie de $\mathbb{N}$ telle que

- E contient n_0.
- pour tout $n \geqslant n_0$, si E contient n, alors E contient $n+1$.

Alors E contient tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ supérieurs à n_0.

Théorème (Principe de récurrence simple) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$, une proposition dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si

- $P(n_0)$ (la propriété est initialisée)
- $\forall n \geqslant n_0, (P(n) \implies P(n+1))$ (la propriété est héréditaire)

alors $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$.

Théorème (Principe de récurrence double) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$, une proposition dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si

- $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ (la propriété est initialisée)
- $\forall n \geqslant n_0, ((P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2))$ (la propriété est héréditaire)

alors $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$.

Théorème (Principe de récurrence forte) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$, une proposition dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Si

- $P(n_0)$ (la propriété est initialisée)
- $\forall n \geqslant n_0, ((\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)) \implies P(n+1))$ (la propriété est héréditaire)

alors $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$.

2 Ensembles

Définition : Un ensemble est une collection d'éléments.

Définition : Soit E, un ensemble. L'ensemble contenant exactement $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est noté $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. On dit que cet ensemble est défini par description (on donne tous les éléments de l'ensemble).

Définition : Soit E, un ensemble et $P(x)$, une proposition dépendant de $x \in E$. L'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $P(x)$ est noté $\{x \in E : P(x)\}$. On dit que cet ensemble est défini par compréhension.

Définition : Si x est dans l'ensemble E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on le note $x \notin E$.

Définition : L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Définition : Soit E, F, deux ensembles. On dit que E est inclus dans F noté $E \subset F$ lorsque

$$\forall x \in E, x \in F.$$

On dit alors que F est une partie ou sous-ensemble de E.

Définition : Soit E, un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition : Soit E un ensemble, et A, B, deux parties de E. On appelle

- réunion de A et B, l'ensemble $\{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$ noté $A \cup B$.
- intersection de A et B, l'ensemble $\{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$ noté $A \cap B$.
- la différence de A et B l'ensemble $\{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$, noté $A \backslash B$.
- le complémentaire de A dans E, l'ensemble $\{x \in E : x \notin A\}$, noté $E \backslash A, \overline{A}, \complement_E^A$ ou A^C.

Définition : Soit I, un ensemble. On se donne pour tout $i \in I$, un ensemble A_i. On appelle union des $(A_i)_{i \in I}$ notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, l'ensemble constitué de tous les éléments qui appartiennent à au moins un A_i.

$$\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) \Longleftrightarrow (\exists i \in I,\ x \in A_i)$$

Définition : Soit I, un ensemble. On se donne pour tout $i \in I$, un ensemble A_i. On appelle intersection des $(A_i)_{i \in I}$ notée $\bigcap_{i \in I} A_i$, l'ensemble constitué de tous les éléments qui appartiennent à tous les A_i.

$$\left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right) \Longleftrightarrow (\forall i \in I,\ x \in A_i)$$

Définition : Soit E, F deux ensembles. On définit le produit cartésien de E par F comme étant l'ensemble $\{(x, y) : x \in E, y \in F\}$ noté $E \times F$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_0, \cdots, A_n$ des ensembles. On appelle produit cartésiens des $A_0, \cdots, A_n$, l'ensemble définit par

$$\{(x_0, \cdots, x_n) : \forall i \in [\![0, n]\!], x_i \in A_i\},$$

noté $A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n$ ou encore $\prod_{i=0}^{n} A_i$.

Proposition : Pour tout ensemble A :

- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \times \varnothing = \varnothing$
- Soit $P(x)$ une proposition. Alors il existe $x \in \varnothing$, $P(x)$ est toujours faux.
  En particulier, $\neg(\exists x \in \varnothing,\ \neg P(x))$ est vraie, ie $\forall x \in \varnothing,\ P(x)$.

Proposition : Soit E un ensemble.
Soient A, B, C des sous-ensembles de E. Alors :

$$\begin{array}{ll}
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
E\backslash(A \cup B) = (E\backslash A) \cap (E\backslash B) & E\backslash(A \cap B) = (E\backslash A) \cup (E\backslash B) \\
A \cup E = E & A \cap E = A \\
E\backslash(E\backslash A) = A & (E\backslash A) \cup A = E \\
(E\backslash A) \cap A = \varnothing &
\end{array}$$

Proposition : Soit E un ensemble. Soit I un ensemble. $\forall i \in I$, on se donne A_i, un sous-ensemble de E. Alors :

- $E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i)$
- $E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i)$
- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$
- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$

Définition : Soit A, B, deux ensembles. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjoints. On introduit la notation $A \sqcup B$ désignant $A \cup B$ et donnant l'information que l'union est disjointe.

Définition : Soit E, un ensemble. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ forment un recouvrement de E si les ensembles $(A_i)_{i\in I}$ vérifie

$$\bigcup_{i\in I} A_i = E.$$

Il est dit disjoint si $\forall i, j \in I, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

Définition : Soit E, un ensemble. on dit que $(A_i)_{i\in I}$ forment une partition de E si les $(A_i)_{i\in I}$ forment un recouvrement disjoint de E, et que tous les A_i sont non nuls pour $i \in I$.

3 Applications

Rappel : conformément au programme, on ne distingue pas les notions de fonctions et d'applications.

Dans toute la suite, E, F, G désigne des ensembles.

Définition : Un graphe de E vers F est une partie de $E \times F$.

Définition : Une fonction est un triplet $f = (E, F, \Gamma)$ où Γ est un graphe de E vers F telle que

$$\forall x \in E, \exists! y \in E, (x, y) \in \Gamma.$$

On dit aussi que f est une application de E vers F. Le réel y est alors noté $f(x)$.

Définition : Soit $f = (E, F, \Gamma)$, une fonction.

- E est appelé ensemble de départ de f.
- F est appelé ensemble d'arrivée de f.
- Pour $x \in \mathrm{E}$, l'élément $f(x)$ est appelé image de x par f.
- Pour $y \in \mathrm{F}$, un élément x tel que $f(x) = y$ est appelé antécédent de y par f.
- L'ensemble $\{f(x) : x \in \mathrm{E}\}$ est appelé l'ensemble image de f.

On note alors la fonction f comme suit :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{E} & \to & \mathrm{F} \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Cela se lit : « f est la fonction qui à x dans E associe $f(x)$ dans F ».

Définition : L'application $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} : x \in \mathrm{E} \mapsto x \in \mathrm{E}$ est une fonction, appelée identité de E.

Définition : L'ensemble des fonctions de E dans F est noté $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, ou encore F^{E}.

Définition : Soit A, un sous-ensemble de E. On définit l'indicatrice de A, la fonction qui $x \in \mathrm{E}$ associe 1 si $x \in \mathrm{A}$, 0 sinon. On la note $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$.

Définition : Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$. Soit A, une partie de E, et E', un ensemble contenant E. La fonction $f : x \in \mathrm{E}' \mapsto f(x) \in \mathrm{F}$ est appelée prolongement de f sur E'. La fonction $f : x \in \mathrm{A} \mapsto f(x) \in \mathrm{F}$ est appelée restriction de f à A, et est noté $f_{|\mathrm{A}}$.

Définition : Soit $f \in \mathrm{F}^{\mathrm{E}}$. Soit A, une partie de E, B une partie de F. On définit l'image directe de A par f l'ensemble $\{f(x) : x \in \mathrm{A}\}$, noté $f(\mathrm{A})$. On définit l'image réciproque de B par f l'ensemble $\{x \in \mathrm{E} : f(x) \in \mathrm{B}\}$, noté $f^{-1}(\mathrm{B})$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, et $g \in \mathcal{F}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. On définit $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ l'application composée de g et f définie par $g \circ f : x \in \mathrm{E} \mapsto g(f(x)) \in \mathrm{G}$. On lit souvent « g rond f ».

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. f est dite injective lorsque $\forall x, y \in \mathrm{E}, f(x) = f(x) \Longrightarrow x = y$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. f est dite surjective lorsque $\forall y \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. f est dite bijective lorsque f est injective et surjective.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. f est bijective si, et seulement si $\forall y \in \mathrm{F}, \exists! x \in \mathrm{E}, f(x) = y$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, bijective. Pour tout $y \in \mathrm{F}$, il existe un unique réel x, que l'on note $f^{-1}(y)$, tel que $f(x) = y$. On définit alors $f^{-1} : y \in \mathrm{F} \mapsto f^{-1}(y) \in \mathrm{E}$.

Proposition : Si f est bijective, f^{-1} l'est aussi.

Proposition : Si f est bijective de E dans F, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$.

Proposition : La composée de deux fonctions in-, sur-, bijective est respectivement in-, sur-, bijective.

Proposition : Si f est bijective de E dans F, si B est une partie de F, alors l'image réciproque de B par f coïncident avec l'image directe de B par f^{-1} (les notations sont les mêmes).

Proposition (non explicite au programme) : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}, \mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. On a

- $f^{-1}(f(\mathrm{A})) \supset \mathrm{A}$, avec égalité si, et seulement si, f est injective.
- $f(f^{-1}(\mathrm{B})) \subset \mathrm{B}$, avec égalité si, et seulement si, f est surjective.

Proposition (non explicite au programme) : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2 \subset \mathrm{E}$. Soit $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \subset \mathrm{F}$. Alors :

1) $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cup f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
2) $f^{-1}(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) = f^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f^{-1}(\mathrm{B}_2)$
3) $f(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2) = f(\mathrm{A}_1) \cup f(\mathrm{A}_2)$
4) $f(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2) \subset f(\mathrm{A}_1) \cap f(\mathrm{A}_2)$ l'autre inclusion étant fausse en général

4 Relations

Définition : Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble R de $E \times E$. On note pour indiquer que $(x, y) \in R$: $x\mathcal{R}y$.

Définition : Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est dite :

- réflexive lorsque $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$,
- transitive lorsque $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$,
- symétrique lorsque $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y) \Longrightarrow (y\mathcal{R}x)$,
- antisymétrique lorsque $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.

Définition : Une relation d'équivalence sur E est une relation sur E réflexive, transitive, symétrique.

Définition : Soit $\sim$, une relation d'équivalence sur E. On appelle classe d'équivalence de $x \in E$, l'ensemble noté $Cl(x)$ ou encore $\overline{x}$ définit par $\{y \in E : x \sim y\}$.

Définition : Soit $\sim$, une relation d'équivalence sur E. Soit $C \subset E$. On dit que C est une classe d'équivalence lorsque $\exists x \in C, \forall y \in E, x \sim y \Longrightarrow y \in C$. Un tel x est appelé représentant de la classe d'équivalence de C.

Proposition : Soit $\sim$, une relation d'équivalence sur E, et $x, y \in E$. Alors $x \sim y \Longleftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

Proposition : Soit $\sim$, une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalences forment une partition de E.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On dit que x est congrus à y modulo a, et on note $x \equiv y[a]$ lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$. Alors $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Définition : Une relation d'ordre sur E est une relation sur E réflexive, transitive, antisymétrique.

Définition : Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est totale lorsque $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire, elle est dire partielle.

Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

Maths Sup - Concours scientifiques

1 Sommes et produits

Dans cette section, I est un ensemble fini d'indices, et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$, une famille de réels. **Définition** : On définit la somme de tous les réels $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ par $\sum_{i\in \mathrm{I}} a_i$. Si $\mathrm{I} = [\![1, n]\!]$, on note $\sum_{i=1}^{n} a_i$. Par convention, si $\mathrm{I} = \varnothing$, la somme est nulle.

Définition : On définit le produit de tous les réels $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}$ par $\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i$. Si $\mathrm{I} = [\![1, n]\!]$, on note $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Par convention, si $\mathrm{I} = \varnothing$, le produit vaut 1.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n, ou factorielle n, la quantité $\prod_{i=1}^{n} i$, notée $n!$. On a donc $0! = 1$. (On dit parfois n factorielle).

Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a_i)_{i\in \mathrm{I}}, (b_i)_{i\in \mathrm{I}}$, deux familles de réels. Alors

$$\sum_{i\in \mathrm{I}} (\lambda a_i + b_i) = \lambda \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i + \sum_{i\in \mathrm{I}} b_i.$$

Définition : On appelle somme (resp. produit) télescopique, une somme de différences de deux termes consécutifs (resp. quotients de deux termes consécutifs).

Proposition : Soit $a_0, \cdots, a_n$, des réels.
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} - a_k = a_n - a_0.$$

Proposition : Soit $a_0, \cdots, a_n$, des réels non nuls.
$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}.$$

Proposition : Soit I, J, deux ensembles d'indices. Soit f, une bijection de J dans I. Alors
$$\sum_{j\in \mathrm{J}} a_{f(j)} = \sum_{i\in \mathrm{I}} a_i.$$

Proposition : On a
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Proposition : Soit $n \geqslant 2$. On a
$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(b_i)_{i\in \mathrm{I}}$, une famille de réels. Alors
$$\prod_{i\in \mathrm{I}} (a_i^\lambda b_i) = \left(\prod_{i\in \mathrm{I}} a_i\right)^\lambda \prod_{i\in \mathrm{I}} b_i.$$

Proposition : Soit $a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_m$, des réels non nuls.
$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_k b_l = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_k b_l = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{m} b_l\right).$$

Proposition : Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$, des réels non nuls.
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}.$$

Définition : un coefficient binomial est une quantité s'écrivant $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – lue k parmi n – avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Par convention, lorsque $k > n$ ou $k < 0$, le coefficient binomial est nul.

Proposition : Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in [\![0, n]\!]$. On a

- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (dite Relation de Pascal).

Proposition (Formule du binôme) : Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2 Systèmes linéaires

Définition : Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

où x, y sont les inconnus, et a, b, c, d, e, f, g sont des réels ou complexes.

Interprétation géométrique dans le cas réel. Supposons que $(a,b) \neq (0,0), (c,d) \neq (0,0)$. L'équation $ax + by = e$ est l'équation d'une droite, l'équation $cx + dy = f$ aussi. Chercher les solutions au système revient donc à regarder les points d'intersections de ces droites. Il y a trois cas :

1) Les droites sont sécantes et il y a un seul point d'intersection, donc une seule solution.
2) Les droites sont parallèles et confondues. Il y a une infinité de solutions : tous les points d'une des deux droites.
3) Les droites sont parallèles et non confondues. Il n'y a pas de solution.

Définition (Opérations élémentaires) : Soit (S), un système linéaire. On appelle opération élémentaire, l'une des trois opérations suivantes :

1) Transvection : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Soit i, j, deux indices de deux lignes différentes du système. On réalise une transvection lorsqu'on ajoute à la ligne i λ fois la ligne j. On le note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
2) Dilatation : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Soit i, indice d'une ligne. On réalise une dilatation lorsque on multiplie une ligne par λ. On le note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3) Echange : Soit i, j, deux indices de deux lignes differentes. On réalise un échange lorsqu'on échange les lignes i et j. On le note $L_i \leftrightarrow L_j$.

Propostion : Les solutions d'un système linéaire ne changent pas lorsqu'on effectue une opération élémentaire sur le système.

Algorithme du Pivot de Gauss. On se donne un système linéaire à n équations, p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

On procède comme suit :

- Si tous les coefficients devant x_1 sont nuls, x_1 n'intervient pas dans le système, et on a un système à n équations, $p-1$ inconnues. On rapplique alors la méthode du pivot de Gauss.
- Sinon, on prend un coefficient non nul, disons en ligne i. On échange les lignes 1 et i via $L_1 \leftrightarrow L_i$.
- Sur chaque ligne autre que la première, on réalise $L_i \leftarrow L_i + \frac{-a_{i1}}{a_{11}} L_1$. On obtient alors, en ne regardant pas la première ligne, un système à $n-1$ équations pour $p-1$ inconnues. On applique la méthode du pivot de Gauss sur ce système.

Le résultat est un système triangulaire (c'est-à-dire les coefficients a_{ij} sont nuls dès que $i > j$).

3 Trigonométrie

Cette section est un formulaire de trigonométrie.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	E_F	E_A	Dérivée
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$-\sin$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\cos$
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$	$1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$

Propriétés fondamentales :

- $\cos^2+\sin^2=1$.
- $\cos(\mathbb{R})=[-1,1]$, $\sin(\mathbb{R})=[-1,1]$.
- cos et sin sont 2π-périodiques.

Formules circulaires : Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos(-x)=\cos(x) \text{ (fonction paire)}$$
$$\sin(-x)=-\sin(x) \text{ (fonction impaire)}$$

$$\begin{array}{rr}
\cos(\pi-x)=-\cos(x) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x) \\
\sin(\pi-x)=\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x) \\
\cos(\pi+x)=-\cos(x) & \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x) \\
\sin(\pi+x)=-\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)
\end{array}$$

Formules d'addition : Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$$

Formules de duplication (dites de Carnot) : Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos(2x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$$
$$\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x).$$

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}\ ;\ \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Formules de multiplication : Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$:

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$
$$\cos(a)\sin(b)=\frac{\sin(a-b)-\sin(a+b)}{2}$$

Dérivée des fonctions cos **et** sin : On a

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sin^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \cos^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$$

Formule de sommes/différences (dites de Simpson) (pas explicitement au programme, à savoir retouver) :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Formule de l'arc moitié : Soit $t = \tan(\theta/2)$. Alors

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$.

Définition : $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.

Proposition : tan est impaire, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\pi-$périodique, strictement croissante sur les intervalles $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ pour k fixé, dérivable sur chacun de ces intervalles de dérivée $1 + \tan^2$.

Formulaire pour tangente :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)};\ \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \ \left(\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2} \text{ avec } t = \tan(\theta/2)\right)$$

$$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)};\ \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$$

Chapitre 0. Préliminaires

Maths SUP

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche méthodologique

Dans toute la suite de la fiche méthodologique, A, B et C sont trois propositions et E, F et G sont trois ensembles.

0. Apprendre et comprendre son cours

I. Notions de logique

1. Démontrer que $A \Rightarrow B$

Pour démontrer un énoncé du type : $A \Rightarrow B$, on peut :

– supposer que A est vraie et démontrer que B est alors vraie,

– raisonner par contraposée en montrant que $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, c'est-à-dire en supposant que B est fausse et en montrant que A est alors fausse.

Attention : il y a une différence (souvent méconnue) entre un raisonnement par contraposée et un raisonnement par l'absurde. Un raisonnement par contraposé sert à montrer une implication (du type $A \Rightarrow B$) où on ne montre ni que A est vraie ni que B est vraie : on montre que si A est vraie alors B l'est également. Un raisonnement par l'absurde sert au contraire à montrer qu'une propriété est fausse, en supposant qu'elle soit vraie et en aboutissant alors à une contradiction.

Rédaction : supposons que <u>A soit vraie</u>, on a alors ... donc ... donc ... et donc <u>B est vraie</u>. <u>On peut conclure : $A \Rightarrow B$.</u>

2. Démontrer que $A \Leftrightarrow B$

Pour démontrer un énoncé du type : $A \Leftrightarrow B$, on peut :

– raisonner par équivalence en montrant directement que A est équivalente à B (attention, l'équivalence est souvent difficile à conserver pendant un long raisonnement),

– raisonner par équivalence en montrant que $\overline{A}$ est équivalent à $\overline{B}$,

– raisonner par double implication en montrant que $A \Rightarrow B$ et que $B \Rightarrow A$,

– utiliser la contraposée dans la méthode précédente, en montrant que $A \Rightarrow B$ et que $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.

3. Démontrer un énoncé du type : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que : $C_{x,y}$, où la propriété $C_{x,y}$ dépend de x et de y

Pour démontrer un énoncé du type : $\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $C_{x,y}$ soit vraie on peut **successivement** :

– (étape 1) fixer arbitrairement un élément y quelconque appartenant à F,

– (étape 2) supposer que $C_{x;y}$ est vraie pour un certain x appartenant à E, et établir des conditions nécessaires sur x (si $C_{x,y}$ est vraie alors nécessairement x possède telle ou telle propriété),

– (étape 3) choisir un $x \in E$ vérifiant les conditions nécessaires obtenues à la question précédente et montrer que pour ce x, $C_{x,y}$ est vraie.

On utilise parfois la notation x_y pour souligner que le choix de l'élément $x \in E$ dépend de l'élément $y \in F$.

Rédaction : soit $y \in F$, montrons qu'il existe $x \in E$ tel que A soit vraie.

Ne pas confondre : ▪ "l'énoncé A est une condition nécessaire pour que B soit vraie", ce qui signifie : $B \Rightarrow A$,

▪ "l'énoncé A est une condition suffisante pour que B soit vraie" ce qui signifie : $A \Rightarrow B$,

▪ "l'énoncé A est une condition nécessaire et suffisante pour que B soit vraie" ce qui signifie : $A \Leftrightarrow B$.

II. Raisonnements, récurrence

1. Effectuer un raisonnement par analyse - synthèse

Précisons tout d'abord qu'il est rare que l'énoncé d'un problème demande directement aux étudiants d'utiliser un raisonnement par analyse - synthèse. C'est à l'étudiant de prendre l'initiative de l'utiliser. La méthode sera présenté sur deux cas où elle est fréquemment utilisée.

Pour résoudre une question du type "déterminer l'ensemble des éléments $x \in E$ qui vérifient la propriété A(x)" on peut **sucessivement** :

– (étape 1 : analyse) fixer arbitrairement un élément $x \in E$, supposer ensuite qu'il vérifie la propriété A(x) et en déduire des conditions nécessaires sur l'élément x,

– (étape 2 : synthèse) choisir un élément $x \in E$ vérifiant les conditions nécessaires trouvées à l'étape précédente et voir s'il vérifie la propriété A(x). Si ce n'est pas le cas, on peut rajouter des conditions sur x pour que les conditions deviennent aussi suffisantes.

Lorsque l'on a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes sur $x \in E$, en général, elles sont assez précises pour pouvoir exhiber l'ensemble des $x \in E$ recherché.

De même, pour résoudre des questions du type "montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que A(x) soit vraie" on peut :

– (étape 1 : analyse) fixer arbitrairement un élément $x \in E$, et montrer que nécessairement, si x existe et vérifie la propriété A(x), alors il est unique. En supposant que A(x) est vérifiée, on arrive en général à une expression du type "nécessairement x = ..." ce qui prouve son unicité,

– (étape 2 : synthèse) vérifier que l'élément x trouvé à l'étape précédente vérifie bien la propriété A(x). Cette étape est indispensable, car la première est réalisée uniquement sous réserve d'existence.

2. Effectuer un raisonnement par récurence

Attention ! Le raisonnement par récurence est sousmis à des règles précises et qu'il est souvent mal vu par les correcteurs de négliger sa réaction ou son contenu. Comme en témoignent les extraits de rapports de jury, les examinateurs sont agacés par la qualité des raisonnements par récurence qui laissent à désirer :

– "La qualité des raisonnements par récurrence laisse beaucoup à désirer. Un effort de tous s'impose réellement",

– "Récurrences maltraitées : mauvaise initialisation, hypothèse de récurrence mal formulée",

– "Nombreuses tentatives de bluff sur les indices",

– "Les candidats **doivent rédiger** les raisonnements par récurrence" .

Recherche : Au brouillon

Commencer à résoudre une question qui (pense-t-on) se traite par récurence au brouillon apporte plusieurs avantage. On suppose la propriété que l'on veut montrer "$\forall n$" au rang "i - 1" et on essaie de la démontrer pour le rang "i". Normalement cela permet de répondre aux questions suivantes :

– "**faut-il absolument faire une récurence** ?" En regardant si par hasard la propriété se montre directement pour tout entier n (si on ne s'est pas servi de l'hypothèse de récurence),

– "**quel type de récurence faut-il faire ?**" En regardant si l'on a besoin uniquement de l'hypothèse au rang "i - 1" (récurence faible sur un terme, cas classique), ou si l'on a besoin des hypothèses au rang "i - 1" et "i - 2" (récurence double), voire si l'on a besoin des hypothèses pour tout les rangs précédant le rang "i" : 0, 1, 2 ... i - 1 (récurence forte),

Rédaction : bien rédiger une récurence

(Etape 0) : dire ce que vous allez faire et quelle récurence vous utiliser

"Montrons par récurence (faible, double, forte, finie ?) sur $n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^*$, $[n_0, +\infty]$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$?) la propriété H_n : "propriété au rang n". **Attention** à ne pas écrire "$\forall n\in\mathbb{N}$, propriété au rang n" car outre la contradiction entre un entier fixé et un entier qui varie, lorsque l'on écrit "supposons H_n vraie", on suppose en réalité la propriété vraie pour tout n, c'est-à-dire ce que l'on veut démontrer...

On se place désormais dans le cadre d'une propriété à démontrer pour tout entier naturel n.

(Etape 1) : Initialisation

Attention encore une fois ici : pour une récurence faible sur un terme ou forte, il suffit d'initialiser une fois (au premier rang) alors que pour une récurence double, il est nécessaire d'initialiser aux **deux premiers rangs** ! Généralement, ce qu'il faut montrer à cete étape est facile. Il ne faut donc pas hésiter à être très précis (puisque c'est facile, autant prendre tout les points).

(Etape 2) : Hérédité

Pour une **récurrence simple sur un terme** : "Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons H_{n-1} vraie" ou "Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que H_{n-1} soit vraie" ou encore "Supposons la propriété H_{n-1} vraie pour un certain entier n quelconque, fixé, dans $\mathbb{N}^*$". La première rédaction est la plus simple. Puis : "Montrons que H_n est vraie".

Alernativement : "Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons H_n vraie" ou "Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que H_n soit vraie" ou encore "Supposons la propriété H_n vraie pour un certain entier n quelconque, fixé, dans $\mathbb{N}$". Puis : "Montrons que H_{n+1} est vraie".

Pour une **récurrence double** (par exemple) : "Soit n un entier supérieur ou égal à 2, supposons H_{n-1} et H_{n-2} vraies. Montrons que H_n est vraie."

Pour une **récurrence forte** : "Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons que pour tout k appartenant à $[0, n-1]$, H_k soit vraie. Montrons que H_n est vraie."

Rédactions à éviter : "supposons que *pour tout n*, H_n soit vraie" (en effet, si l'on suppose ce que l'on veut démontrer, l'exercice devient tout de suite un peu trop facile...) ; à éviter également : "supposons qu'il existe un entier n tel que H_n soit vraie" (en effet, cet entier existe, puisque la propriété a été démontrée au rang 0 : ainsi on ne suppose rien en réalité...)

Erreur à éviter : oublier de préciser où se situe n en indiquant simplement "supposons H_n vraie".

(Etape 3) : Conclusion.

"On peut conclure : $\forall n\in\mathbb{N}$ ($\forall n\in\mathbb{N}^*$, etc. ...), [contenu de H_n]". En effet, il vaut mieux terminer en concluant avec les notations de l'énoncé plutôt qu'avec "H_n", notation que vous avez introduite.

III. Ensembles

1. Monter une inclusion entre deux ensembles

Pour démontrer un énoncé du type : $F\subset E$, on peut :

– montrer que : $x\in F \Rightarrow x\in E$,

– utiliser la transitivité de la relation binaire "$\subset$" en montrant qu'il existe un ensemble G tel que : $F\subset G$ et $G\subset E$,

– montrer que F est une partie de E, c'est-à-dire que $F\in\mathcal{P}(E)$.

– si E est un espace vectoriel, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E (par exemple en montrant que F est le noyau d'une application linéaire définie sur E, voir le chapitre "**Applications linéaires**").

2. Monter une égalité entre deux ensembles

Pour démontrer un énoncé du type : $F = E$, on peut :

– raisonner par équivalence en montrant directement que $x \in F \Leftrightarrow x \in E$,

– raisonner par double inclusion en montrant successivement que $F \subset E$ puis que $E \subset F$ (voir point ci-dessus),

– si E et F sont deux ensembles finis, montrer que : $F \subset E$ et que card E = card F,

– si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, montrer que : $F \subset E$ et que dim E = dim F (voir chapitre "**Espaces vectoriels**").

3. Monter que deux parties d'un ensemble sont complémentaires dans un ensemble

Pour démontrer un énoncé du type : $E = C_G F$, on peut montrer successivement que $E \cap F = \varnothing$, et que $E \cup F = G$.

4. Monter qu'une famille d'ensemble forme une partition d'un ensemble G

Il suffit de se ramener à la définition et de vérifier ses trois points.

IV. Applications

Précisons tout d'abord qu'une injection, surjection, bijection est tout d'abord et avant tout une **application** : ainsi, tout élément de l'ensemble de départ admet toujours une et une seule image. Les propriétés concernant le nombre d'antécédents portent bien sûr sur les éléments de l'ensemble d'arrivée.

Attention également à ne pas confondre l'ensemble d'arrivée (F) avec l'ensemble des images (qui se note : Im f, ou : f(E)). En effet, un élément appartenant à l'image de f a toujours, par définition, au moins un antécédent par f. Il faut s'intéresser aux éléments de l'ensemble d'arrivée, et non de l'ensemble image, si l'on souhaite montrer qu'une application est injective, surjective ou bijective. Par ailleurs, la relation $\text{Im } f \subset F$ doit être connue.

1. Monter qu'une application est injective

Pour montrer qu'une application f définie sur E et à valeurs dans F est injective, on peut :

– considérer deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$ et montrer qu'alors : $x = x'$,

– montrer que f est bijective (toute application bijective étant injective),

– si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est linéaire, se reporter à toutes les méthodes figurant dans la fiche méthodologique du chapitre "**Applications linéaires**".

2. Monter qu'une application est surjective

Pour montrer qu'une application f définie sur E et à valeurs dans F est surjective, on peut :

– considérer un élément y quelconque de F, et montrer qu'il existe au moins un élément x de E tel que $f(x) = y$, éventuellement à l'aide d'un raisonnement par analyse - synthèse),

– montrer que Im f = F,

– si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est linéaire, se reporter à toutes les méthodes figurant dans la fiche méthodologique du chapitre "**Applications linéaires**".

3. Monter qu'une application est bijective

Pour montrer qu'une application f définie sur E et à valeurs dans F est bijective, on peut :

– revenir à la définition en considérant un élément y quelconque de F, et montrer qu'il existe un et un seul élément x de E tel que $f(x) = y$ (éventuellement à l'aide d'un raisonnement par analyse - synthèse),

– montrer que f est injective et surjective,

– déterminer une application g telle que $f \circ g = id$ **et** $g \circ f = id$ (et l'on a alors : $g = f^{-1}$),

– si E et F sont deux espaces vectoriels et si f est linéaire, se reporter à toutes les méthodes figurant dans la fiche méthodologique du chapitre "**Applications linéaires**".

4. Monter qu'une application est une permutation

Pour montrer qu'une application f définie sur E est une permutation, il suffit de se ramener à la définition et de montrer que f est bijective de E dans E.

V. Formules de trigonométrie

Les formules de trigonométrie font partie intégrante du programme. Noter toutefois que la quasi-totalité d'entre-elles se retrouvent assez facilement, en effectuant des sommes ou des produits, à partir des quatre expressions de cos (a + b), cos (a - b), sin (a + b) et sin (a - b) qui sont le plus souvent bien connues des candidats.

Noter également que certaines formules peuvent se retrouver en introduisant des nombres complexes : ainsi, par exemple, l'expression sous forme de produit de cos p + cos q s'obtient en remarquant que cos p + cos q est la partie réelle de $(e^{ip} + e^{iq})$, ce qu'on peut trouver à l'aide des formules d'Eurler après avoir factorisé par les "exponentielles moitiés" (voir le chapitre : "**Nombres complexes**").