

# Optimal Sup-Spé

Groupe Ipesup ■ Le n°1 en Sup-Spé

## Concours 2025

Mines Physique 1 MP 2025

Corrigé du sujet

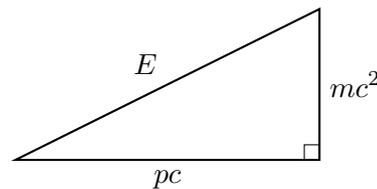
Proposé par Nicolas Chapuis [nico.chapuis@live.fr](mailto:nico.chapuis@live.fr)

© 2025 Ce document est distribué sous licence CC BY 4.0.

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur : [contact@optimalsupspe.fr](mailto:contact@optimalsupspe.fr)

## Impulsion des particules élémentaires

- La relation du triangle relativiste  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$  est composée de trois termes :
  - $mc^2$  : **l'énergie de masse au repos** (aussi nommée *énergie intrinsèque*), indépendante de la vitesse, lié uniquement à la masse.
  - $pc$  : **énergie liée à l'impulsion**, c'est-à-dire à son mouvement. C'est l'énergie cinétique relativiste, exprimée à l'aide de la quantité de mouvement, et non directement à l'aide de la masse et de la vitesse comme dans l'expression de l'énergie cinétique classique.
  - $E$  C'est son **énergie totale**, qui prend en compte les deux précédents : l'énergie liée à sa masse et à son impulsion. C'est donc l'énergie que l'on doit fournir pour créer et/ou accélérer cette particule.



La relation du triangle relativiste peut se visualiser grâce au théorème de Pythagore. L'énergie totale  $E$  est l'hypothénuse.

L'unité usuelle en S.I. de  $p$  est  $kg.m.s^{-1}$  et celle de  $pc$  est  $kg.m^2.s^{-2}$ .

- Au repos, l'impulsion est nulle  $p = 0$ . Ainsi l'énergie de repos du proton s'écrit  $E_0 = m_p c^2$ , avec  $m_{proton} = 1.67.10^{-27} kg = 940 MeV/c^2$ .

$$E_0 = m_p c^2$$

$$E_0 = 940 MeV$$

- Par définition l'énergie cinétique est :  $E_c = E - E_0$  D'après la relation du triangle relativiste

$$E_c = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

En faisant l'hypothèse  $E_c \ll E_0$

$$\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \ll mc^2$$

$$(pc)^2 + (mc^2)^2 \ll (2mc^2)^2$$

$$(pc)^2 \ll (mc^2)^2$$

$$\frac{pc}{mc^2} \ll 1$$

Dès lors, au premier ordre,

$$E_c = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2$$

$$E_c \approx (mc^2) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{pc}{mc^2} \right)^2 \right) - mc^2$$

$$E_c \approx \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

Dans la limite classique, on a  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ , d'où, par identification  $p = \pm m v$  :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Pour rester dans la limite classique, il faut  $v < v_{max}$  avec  $v_{max}$  tel que :

$$E_c(v_{max}) = 0.01E_0$$

$$\sqrt{\frac{(pc)^2}{(mc^2)^2} + 1} - 1 = 0.01$$

$$\frac{pc^2}{(mc^2)^2} = 1.01^2 - 1$$

En injectant  $p = mv_{max}$

$$\frac{v_{max}^2}{c^2} = 1.01^2 - 1$$

$$v_{max} = \sqrt{0.0201}c$$

$$v_{max} = 4.25 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

La vitesse maximale  $v_{max}$  ne dépend pas de la masse de la particule, et vaut 14 % de  $c$ . Elle est donc identique pour un électron.

4. En utilisant  $p^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$E^2 = \frac{m^2v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}c^2 + m^2c^4$$

et en injectant  $E_0 = mc^2$  ou  $m = \frac{E_0}{c^2}$

$$E^2 = \frac{\frac{E_0^2}{c^4}v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}c^2 + E_0^2$$

$$E^2 = E_0^2 \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}E_0$$

5. Le photon a une vitesse  $c$ . D'après l'expression  $E = f(E_0, v, c)$  de la question 4, le dénominateur  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  diverge, donc la condition pour avoir une énergie totale finie est  $E_0 = 0$ , i.e.

$$m_{photon} = 0$$

En repartant de l'équation (1) de l'énoncé, on a

$$E_{photon}^2 = p^2c^2 + 0$$

avec (2) :  $p = \frac{h}{\lambda}$

$$E_{\text{photon}}(\lambda) = \frac{hc}{\lambda} \text{ ou } E_{\text{photon}}(\nu) = h\nu$$

Application numérique pour  $\lambda_{\text{bleu}} = 400\text{nm}$  et  $\lambda_{\text{rouge}} = 600\text{nm}$  :

$$E_{\text{bleu}} = 3.10\text{eV} \text{ et } E_{\text{rouge}} = 2.07\text{eV}$$

## Le spectre d'émission des atomes d'hydrogène

6. On étudie le système S=atome+photon, on note  $E_s$  son énergie.

Avant l'émission,  $E_{si} = E_i + mc^2$ .

Après émission :  $E_{sf} = E_f + \sqrt{p_{\text{atome}}^2 c^2 + m^2 c^4} + E$ .

La conservation de l'impulsion donne  $\vec{0} = p_{\text{atome}} \vec{p} + \vec{p}$ , d'où  $p_{\text{atome}} = p = \frac{E}{c}$

La conservation de l'énergie s'écrit  $E_{si} = E_{sf}$ , avec  $\Delta E = E_i - E_f$

$$\Delta E + mc^2 = \sqrt{E^2 + m^2 c^4} + E$$

Or on est dans le cadre d'une description classique donc  $v \ll c$  ou  $p^2 c^2 \ll m^2 c^4$ , d'où

$$\Delta E + mc^2 = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{E^2}{m^2 c^4}\right) + E$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{E^2}{mc^2} + E - \Delta E = 0$$

En résolvant cette équation polynomiale du second degré, l'énergie du photon s'exprime :

$$E = mc^2 (\sqrt{1 + 2\eta} - 1) \text{ avec } \eta = \frac{\Delta E}{mc^2}$$

7. L'énergie de recul de l'atome s'écrit :

$$E_{\text{recul}} = \frac{p^2}{2m}, \text{ avec } p = \frac{E}{c}$$

On en déduit le rapport avec l'énergie de transition  $\Delta E$  :

$$\frac{E_{\text{recul}}}{\Delta E} = \frac{1}{2mc^2} \cdot \frac{E}{\Delta E}$$

En tenant compte de la relation relativiste :

$$\frac{E_{\text{recul}}}{\Delta E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\frac{\Delta E}{mc^2}} - 1}{\Delta E}$$

Application numérique, avec  $\Delta E = 10\text{eV}$ ,  $m_{\text{Hc}} = 9.38 \times 10^8\text{eV}$  :

$$\frac{E_{\text{recul}}}{\Delta E} \approx 5.3 \times 10^{-10}$$

On peut donc négliger l'énergie de recul devant l'énergie de transition.

Dans ce cas,  $\eta = \frac{\Delta E}{mc^2} \ll 1$ , et à l'ordre 1 :

$$E \approx \eta mc^2 = \Delta E = 10\text{eV}$$

Sur une transition de  $\Delta E = 10 \text{ eV}$ , l'énergie transférée au photon est  $E \approx 10 \text{ eV}$ , et l'énergie de recul correspondante est :

$$E_{\text{recul}} \approx 5.3 \times 10^{-8} \text{ eV}$$

8. Lorsque l'on passe de  $n_i$  à  $n_f$ ,

$$\Delta E = -\frac{H}{2n_f^2} + \frac{H}{2n_i^2}$$

$$\Delta E = \frac{H}{2} \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Or la longueur d'onde du photon s'écrit  $\lambda = \frac{hc}{E}$ , donc :

$$\lambda = \frac{2hc}{H \left( \frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)}$$

Pour maximiser  $\lambda$ , il faut minimiser le dénominateur, ce qui est le cas lorsque  $n_i = n_f + 1$ , et en prenant comme nous le propose l'énoncé  $n_f = 1$  (retour d'un état excité vers l'état fondamental, ce qui correspond à la série de Lyman de l'atome d'hydrogène),  $n_i = 2$  :

$$\lambda < \lambda_{\text{max}} \text{ avec } \lambda_{\text{max}} = \frac{8hc}{3H}$$

$$\lambda_{\text{max}} = 122 \text{ nm pohtons ultra-violets, très énergétiques}$$

De même, la longueur d'onde minimale  $\lambda_{\text{min}}$  est atteinte lorsque l'énergie  $\Delta E$  est maximale, c'est à dire lorsque  $n_i \rightarrow +\infty$

$$\lambda > \lambda_{\text{min}} \text{ avec } \lambda_{\text{min}} = \frac{2hc}{H} n_f^2$$

$$\lambda_{\text{min}} \text{ dans l'infrarouge pour } n_f > 2$$

Pour la série de Balmer,  $n_f = 2$ , on a  $\lambda_{\text{min}} = 365 \text{ nm}$  et  $\lambda_{\text{max}} = 656 \text{ nm}$ , dans le domaine visible.

## Mesures interférométriques de longueurs d'onde

### L'interféromètre de Michelson

9. La couche semi-réfléchissante de  $L_1$  est placé du côté de la source et non du côté du miroir fixe. Ainsi les deux faisceaux sont séparés, le premier allant se réfléchir sur le miroir fixe et le second sur le miroir mobile. Ces deux faisceaux traverseront respectivement deux fois la lame  $L_1$  et deux fois la lame  $L_2$ , n'engendrant ainsi aucune différence de marche due aux traversées des lames des verre.
10. Lorsque les miroirs sont parfaitement perpendiculaires, l'interféromètre est en configuration lame d'air. La figure d'interférence est constituée de **franges circulaires ou franges d'égale inclinaison**. En effet, le système présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe optique, et l'intensité lumineuse sera ainsi invariante par rotation angulaire autour de l'axe optique. La figure d'interférence est formé à l'infini, ce qui explique que le choix d'un oculaire afocal. Si ce dernier est mal réglé, les franges d'interférences deviennent selon le type de dérèglement de l'oculaire **floues, déformées, moins contrastées**, ou bien multiples si la parallaxe de l'oculaire est faussée.
- 11.

Lors du déplacement du miroir mobile le long de l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ , la différence de marche optique entre les deux rayons engendrée est de  $2\Delta z$  dans l'air. Chaque fois que la différence de marche optique change de  $\lambda_0$ , une frange a défilé. Dès lors, la relation s'écrit :

$$\Delta N = 2 \frac{\Delta z}{\lambda_0}$$

12.

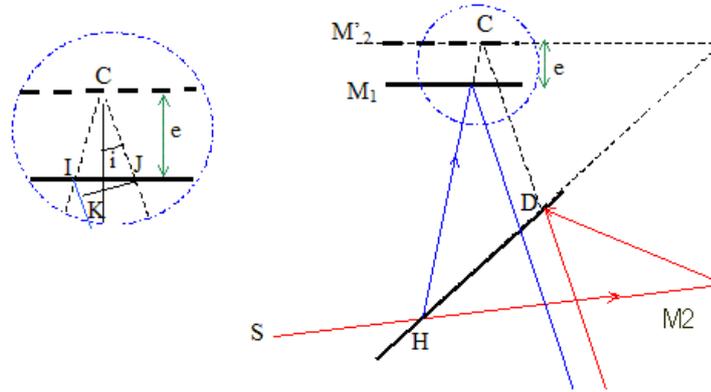


FIGURE 1 – Schéma d'un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air  
Source — <https://www.chimix.com/an7/sup/ai66p.htm>

La différence de marche s'écrit  $\delta = [IC] + [CJ] - [IK]$  avec  $IK = IJ \sin(i)$ ,  $i$  l'angle que forme le rayon avec l'axe optique, et  $e$  l'écart séparant les deux miroirs.

$$\delta = \frac{2e}{\cos(i)} - 2e \tan(i) \sin(i)$$

$$\delta = 2e \cos(i)$$

Dans l'approximation des petits angles  $\cos(i) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ . Avec  $e = \Delta z_{\max}$  La différence de marche s'exprime alors :

$$\delta = 2\Delta z_{\max} \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = 2\Delta z_{\max} - \Delta z_{\max} \theta^2$$

Au centre (contact optique), la différence de marche est :

$$\delta_0 = 2\Delta z_{\max}$$

La première frange brillante de même nature correspond à une différence de marche augmentée de  $\lambda$ , donc :

$$\delta = \delta_0 + \lambda = 2\Delta z_{\max} + \lambda$$

$$2\Delta z_{\max} - \lambda = 2\Delta z_{\max} - \Delta z_{\max} (\Delta\theta)^2 \Rightarrow \lambda = \Delta z_{\max} (\Delta\theta)^2$$

$$\Delta\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\Delta z_{\max}}}$$

13. On observe le défilement de  $N = 3156$  franges pour un déplacement du miroir mobile de

$$\Delta z = 1035 \pm 2 \mu\text{m}$$

La longueur d'onde est reliée au nombre de franges par la relation de la question question 11 :

$$\Delta N = \frac{2\Delta z}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\Delta z}{\Delta N}$$

L'application numérique donne avec l'incertitude :

$$\lambda = (656.0 \pm 0.6) \text{ nm raie } H_{\alpha} \text{ rouge de la série de Balmer}$$

L'application numérique pour  $\Delta\theta$  donne :

$$\Delta\theta \approx 0.0252 \text{ rad} \approx 1.44^\circ$$

$\Delta\theta$  est petit, les franges sont très concentrées autour de l'axe optique, ce qui justifie l'utilisation d'un oculaire afocal.

### Cohérence spectrale d'une source

14. Pour la source rigoureusement monochromatique, l'intensité s'exprime :

$$I(\delta) = 2 * I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right)$$

On définit le facteur de contraste :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Et on le calcule dans le cas de la source monochromatique :

$$C = \frac{2I_0 - 0}{2I_0 + 0} = 1.$$

15. Les deux radiations n'interfèrent pas puisque qu'elles ne sont pas isochrones, on peut donc sommer les interférences.

$$I(\delta) = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

Avec  $\lambda_0$  et  $\Delta\lambda$ ,

$$I(\delta) = I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}} \right) \right) + I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} \right) \right)$$

avec la formule de trigonométrie

$$\cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) = 2 \cos \left( \frac{\pi\delta}{\lambda_0} \right) \cos \left( \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)$$

on obtient

$$I(\delta) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi\delta}{\lambda_0} \right) \cos \left( \frac{2\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right)$$

Pour calculer le contraste, on maximise et minimise  $\cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right)$ , ainsi

$$c = \left| \cos \frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right|$$

La mesure de la période spatiale  $\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$  des alternances de contraste minimal et maximal permet de mesurer  $\frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$ .

16. Si les intensités  $I_1$  et  $I_2$  des deux sources ne sont pas égales, les longueurs d'ondes étant différentes, nous pouvons sommer les intensités :

$$I(\delta) = 2(I_{01} + I_{02}) + 2I_{01} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + 2I_{02} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right)$$

On fait l'approximation que la somme des deux cosinus peut s'écrire sous la forme d'une modulation, si les longueurs d'ondes sont suffisamment proches.

$$2I_{01} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + 2I_{02} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \approx 4\sqrt{I_{01}I_{02}} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$$

L'intensité totale s'écrit alors

$$I(\Delta) \approx 2(I_{01} + I_{02}) + 4\sqrt{I_{01}I_{02}} \cos\left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_0}\right) \cos\left(\frac{\pi\Delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$$

Par analogie avec la question précédente, le contraste correspond donc à l'amplitude relative du terme de modulation lente en  $\cos\left(\frac{\pi\Delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$

$$C = \frac{2\sqrt{I_{01}I_{02}}}{I_{01} + I_{02}} \left| \cos\left(\frac{\pi\Delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right) \right|$$

Calculons la période spatiale  $\Gamma$  de la modulation lente avec  $\Delta\lambda = 1.4 \cdot 10^{-11} m$  et  $\lambda_0 \approx 656 nm$  pour la raie  $H_\alpha$  :

$$\Gamma = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \approx 3.08 cm$$

L'intensité totale des franges présente un maximum tous les 3.08cm de différence de marche. En revenant à l'écart réel entre les deux miroirs, il faut donc faire varier ce dernier de la moitié :  $\approx 1.5 cm$  pour faire apparaître un battement complet. Des déplacements de quelques centimètres sont **réalistes avec un tel montage**.

## Les tubes a Hydrogène

17. Les décharges électriques dans le gaz basse pression provoquent des excitations et l'ionisation des atomes, l'émission de lumière et donc chauffe localement le gaz. Pour garder les paramètres thermodynamiques constants et donc produire un plasma stable, **le système d'écoulement d'eau agit comme un système de refroidissement**.

Puisque la figure 4, est un spectre d'émission, l'abscisse est la longueur d'onde. D'après l'énoncé,  $H_{beta}$  a une longueur d'onde vers le domaine du bleu du visible, et l'abscisse de  $H_\beta$  est vers 5000, donc l'unité est les **Ångströms**.

Le fond **continu provient des recombinaisons des électrons libres avec les protons** (atome d'hydrogène ionisé), qui libèrent alors des photons. Les protons peuvent se désexciter à un niveau inférieur, mais assez probablement retourner à leur niveau fondamental. On a vu question 8 que ces retours aux états fondamentaux produisaient des photons très énergétiques dans le domaine de UV, ce que l'on retrouve sur la figure 4 : le fond continu se déploie bien dans les longueurs d'ondes UV.

- L'aspect **continu** de ce spectre s'explique par le fait que **les électrons libérés peuvent avoir une énergie quelconque**, ce qui produira des photons sur un spectre continu. La propriété du spectre d'émission de la molécule hydroxyde est **l'absence de bande continue**. En effet, il

n'y a pas dans le tube a décharge rempli de vapeur d'eau d'électrons libres qui se recombinent avec un atome comme dans le cas du tube à hydrogène. Le spectre de la lampe a fécharge avec vapeur d'eau est donné la les raies atomiques de l'hydrogène et les bandes vibrationnelles ou electronies du la molécule HO. Au total, le spectre observé est un spectre raies et bandes dans fond continu.

19. Grâce à la formule de la longueur d'onde d'émission prenant en compte la mase du noyau, on vérifie aisément que plus le noyau est lourd, plus la longueur d'onde est petite. **Les raies du deutérium sont ainsi décalées vers le bleu par rapport à celles de l'hydrogène.**

Pour calculer la résolution spectrale, prenons par exemple la raie  $H_\beta$  sur la figure 4 avec  $\lambda_\infty=480$  nm. Les longueurs d'ondes d'émissions sont donc respectivement pour l'hydrogène et pour le deutrium  $\lambda_H = \lambda_\infty(1 + \frac{m_e}{m_p})$  et  $\lambda_D = \lambda_\infty(1 + \frac{m_e}{m_d})$ .

La résolution spectrale s'écrit donc  $\Delta\lambda = |\lambda_H - \lambda_D| = \lambda_\infty \cdot m_e \left| \left( \frac{1}{m_p} - \frac{1}{m_d} \right) \right|$ , et l'application numérique donne  $\Delta\lambda = 0.132\text{nm}$ ,

## L'équation de Klein-Gordon

20. Un état stationnaire est caractérisé par **une densité de probabilité qui ne dépend pas du temps**. Donnons donc l'expression de cette dernière  $|\Phi(\vec{r}, t)|^2$ , d'après la forme de solution donnée par l'énoncé :

$$|\Phi(\vec{r}, t)|^2 = |\Phi_0|^2 \text{ indépendant du temps}$$

L'onde se propage dans le sens des x croissants.

La vitesse de phase s'exprime, par analogie avec la forme classique  $v_\Phi = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$

$$v_\Phi = \frac{\omega}{|\vec{k}|} = \frac{E/\hbar}{|\vec{p}|/\hbar} = \frac{E}{|\vec{p}|(E)}$$

De même la vitesse de groupe  $v_g$  s'exprime :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{E(k\hbar)}{\hbar} \right) = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dp} \cdot \frac{dp}{dk}$$

Or  $p = \hbar k$ , donc  $\frac{dp}{dk} = \hbar$ . On obtient alors :

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \cdot \frac{dE}{dp} \cdot \hbar$$

$$v_g = \frac{dE}{dp}$$

21. Dans le cas d'une particule vérifiant l'équation de Schrodinger dans un domaine où V est constant, en injectant la forme de solution proposée dans l'énoncé :

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + V\phi$$

ce qui donne :

$$E = \frac{p^2}{2m} + V$$

On en déduit donc l'impulsion :

$$p(E) = \sqrt{2m(E - V)}$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g(E) = \frac{dE}{dp} = \sqrt{\frac{2(E - V)}{m}}$$

L'expression de l'énergie est celle de l'énergie mécanique classique et non celle relativiste étudiée en partie 1. De plus la vitesse de groupe est égale à la vitesse classique. **Ainsi le modèle associé à l'équation de Schrödinger est non relativiste.**

22. De la même manière, en injectant la forme de solution proposée dans l'équation de Klein-Gordon :

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0$$

on obtient la relation entre l'énergie et l'impulsion :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$p(E) = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2}$$

et la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{c^2}{E} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2}$$

$v_g$  correspond à la vitesse d'une particule relativiste, et est toujours strictement inférieure à la vitesse de la lumière  $c$ .

23. Dans le domaine  $[0, a]$  l'énergie n'est pas suffisante pour qu'une onde se propage. On obtient des solutions exponentielles décroissantes. **Ce sont donc des ondes évanescentes.**

Pour exprimer les coefficients  $\underline{R}$  et  $\underline{T}$  on écrit **la continuité de la fonction d'onde en  $x = 0$  et  $x = a$ .**

On met en évidence le phénomène d'**effet tunnel quantique**. La particule a une probabilité non nulle de traverser la barrière de potentielle, ce qui est impossible en mécanique classique.  $|\underline{T}|^2$  est le module de la fonction d'onde au carré, donc **sa densité de probabilité de traverser la barrière.**

24. Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon entre 0 et  $a$ , on injecte la forme de solution proposée, ce qui nous donne :

$$p^2 = \frac{1}{c^2} (E - V_0)^2 - m^2 c^2$$

L'énoncé indique  $V_0 - E > mc^2$ , alors  $p^2 > 0$ , donc  $p \in \mathbb{R}$  et la solution est une onde plane :

$$\phi(x, t) = \phi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

La particule peut se **propager dans la barrière**, malgré  $E < V_0$ . Ce comportement est **purement relativiste**, sans équivalent en mécanique non relativiste.

25. On considère la densité de probabilité de traverser la barrière :

$$T^2 = \frac{1}{|\cos \varphi - i\alpha \sin \varphi|^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi}$$

avec :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right), \quad \varphi = \frac{qa}{\hbar}$$

On pose :

$$f(\varphi) = \cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi = 1 + (\alpha^2 - 1) \sin^2 \varphi$$

Cette expression est minimale lorsque  $\sin^2 \varphi = 0$ , soit pour :

$$\varphi = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

On a alors :

$$f(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad T_{\max}^2 = 1$$

La transmission est totale lorsque  $\varphi = n\pi$ , ce qui correspond à une **résonance de transmission parfaite**.

\*\*\*

FIN DU SUJET