Optimal Sup-Spé

Groupe Ipesup ▪ Le n°1 en Sup-Spé

Concours 2025

Centrale Physique 1 PC 2025

Corrigé du sujet

Proposé par Nicolas Chapuis nico.chapuis@live.fr

Ne pas hésiter à signaler ce que vous pensez être une erreur : contact@optimalsupspe.fr

1 Mécanique et célérité de la lumière

1. Exprimons les distances parcourues pour les signaux émis respectivement à t_{k+1} et t_k :

- $d_{k+1} = (t'_{k+1} - t_{k+1})c_0$
- $d_k = (t'_k - t_k)c_0$

Ainsi, en utilisant le fait que $t_{k+1} - t_k = T$

$$\boxed{d_{k+1} = d_k + (t'_{k+1} - t'_k - T)c_0}$$

Entre t_{k+1} et t_k, le récepteur s'est déplacé de $d_{k+1} - d_k = v(t'_{k+1} - t'_k)$, ainsi :

$$\boxed{T' = t'_{k+1} - t'_k = T\frac{1}{1-\frac{v}{c_0}}}$$

T' ne dépend pas de k, la reception est donc périodique de période T'. L'effet Doppler est le nom du phénomène ainsi mis en évidence.

2. En utilisant la relation de Chasles :

$$\|\vec{R_{k+1}E}\| = \|\vec{R_{k+1}R_k} + \vec{R_kE}\|$$

en utilisant les notations de l'énoncé :

$$\|\vec{R_{k+1}E}\| == \|\vec{v}(t'_{k+1} - t'_k) - d_k\,\vec{u}_x\|$$

$$= \|(v_x(t'_{k+1} - t'_k) - d_k)\,\vec{u}_x + v_y(t'_{k+1} - t'_k)\vec{u}_y\|$$

$$= \sqrt{\left(v_x(t'_{k+1} - t'_k) - d_k\right)^2 + \left(v_y(t'_{k+1} - t'_k)\right)^2}$$

$$\boxed{\|\vec{R_{k+1}E}\| = \sqrt{(v_xT' - d_k)^2 + (v_yT')^2}}$$

3. On part de l'expression de la question précédente :

$$\|\vec{R_{k+1}E}\| = \sqrt{(v_xT' - d_k)^2 + (v_yT')^2}$$

Par définition de d_k :

$$\Rightarrow\ d_{k+1} = \sqrt{(v_xT' - d_k)^2 + (v_yT')^2}$$

En utilisant le lien entre d_{k+1} et d_k :

$$\Rightarrow\ d_k + (T' - T)c_0 = \sqrt{(v_xT' - d_k)^2 + (v_yT')^2}$$

On élève au carré :

$$\Rightarrow\ (d_k + (T' - T)c_0)^2 = (v_xT' - d_k)^2 + (v_yT')^2$$

$$\Rightarrow\ d_k^2 + 2d_kc_0(T' - T) + c_0^2(T' - T)^2 = d_k^2 - 2d_kv_xT' + (v_x^2 + v_y^2)T'^2$$

On divise par c_0^2, et en faisant apparaître les ordres en $\dfrac{v}{c_0}$:

$$\underbrace{\frac{2d_k}{c_0}(T' - T)}_{\mathcal{O}\left(\frac{v}{c_0}\right)} + \underbrace{(T' - T)^2}_{\mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c_0^2}\right)} = \underbrace{\frac{2d_kv_xT'}{c_0^2}}_{\mathcal{O}\left(\frac{v}{c_0}\right)} + \underbrace{\frac{(v_x^2 + v_y^2)T'^2}{c_0^2}}_{\mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c_0^2}\right)}$$

On a utilisé, d'après la question 1, que $T' - T \sim T\dfrac{v}{c_0}$.
On ne garde que les termes d'ordre 1 :

$$T'\left(1 - \frac{v_x}{c_0}\right) = T$$

$$\boxed{T' = \frac{T}{1 - \frac{v_x}{c_0}}}$$

4. D'après la 3ème loi de Kelpler :

$$\boxed{T_\mathrm{J} = 2\pi\sqrt{\frac{d_\mathrm{JS}^3}{GM_\odot}}}$$

L'application numérique donne :

$$T_\mathrm{J} = 2\pi\sqrt{\frac{d_\mathrm{JS}^3}{GM_\odot}} = 2\pi\sqrt{\frac{(7{,}78\times10^{11})^3}{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}} \approx 3{,}74\times10^8\ \mathrm{s}$$

$$\boxed{T_\mathrm{J} \approx \frac{3{,}74\times10^8}{86400} \approx 4\,331{,}6\ \text{jours} \approx \frac{4\,331{,}6}{365} \approx 11{,}87\ \text{années}}$$

5. Dans le référentiel tournant à vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_J$ accompagnant Jupiter, la composition des accélérations s'écrit, par rapport au référentiel héliocentrique, pour la Terre :

$$\vec{a}_\text{réel} = \vec{a}_\text{relatif} + 2\vec{\omega}_J\times\vec{v}_\text{relatif} + \vec{\omega}_J\times(\vec{\omega}_J\times\vec{r})$$

La Terre est soumise à la force gravitationnelle du Soleil :

$$a_\text{réel} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}{(1{,}49\times10^{11})^2} \approx 5{,}93\times10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

La vitesse angulaire de Jupiter $\omega_J = \dfrac{2\pi}{T_J}$ est :

$$\omega_J \approx 1{,}68\times10^{-8}\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

L'accélération centrifuge $a_\text{centrifuge} = \omega_J^2 a_0$ est :

$$a_\text{centrifuge} = (1{,}68\times10^{-8})^2\times1{,}49\times10^{11} \approx 4{,}2\times10^{-5}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

L'accélération de coriolis $a_\text{Coriolis} = 2\omega_J v_\text{relatif}$ est :

$$a_\text{Coriolis} = 2\times1{,}68\times10^{-8}\times1{,}67\times10^4 \approx 5{,}6\times10^{-4}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Où nous avons utilisé pour la vitesse relative :

$$v_\text{relatif} = v_\text{Terre} - v_\text{Jupiter}$$

$$v_\text{Terre} = \frac{2\pi a_0}{T_0} \quad ; \quad v_\text{Jupiter} = \frac{2\pi d_\mathrm{JS}}{T_J}$$

$$v_\text{relatif} \approx 29{,}8\ \mathrm{km\,s^{-1}} - 13{,}1\ \mathrm{km\,s^{-1}} = 16{,}7\ \mathrm{km\,s^{-1}}$$

Puisque $a_{\text{Coriolis}} \ll a_{\text{réel}}$ et $a_{\text{centrifuge}} \ll a_{\text{réel}}$, les effets inertiels sont négligeables.

Ainsi, dans le référentiel lié à Jupiter, la trajectoire de la Terre reste circulaire uniforme.

En faisant l'approximation que dans le référentiel de Jupiter, la Terre décrit un cercle autour de Jupiter de rayon d_{JS}, et de vitesse angulaire inchangée par rapport à sa vitesse orbitale propre :

$$v \approx \frac{2\pi d_{\text{JS}}}{T_0}$$

L'application numérique donne :

$$v \approx \frac{2\pi \times 7{,}78 \times 10^{11}}{365 \times 86400} \approx 27 \text{ km s}^{-1}$$

Les valeurs extrêmes et moyennes de la vitesse d'éloignemant de la Terre par rapport à E correspondent par définition à la composante selon l'axe x de la vitesse :

$$v_{\text{éloignement}}(t) = v\cos(\theta(t))$$

D'où

$$v_{\max} = +v \approx +27 \text{ km s}^{-1} \quad ; \quad v_{\min} = -v \approx -27 \text{ km s}^{-1}$$

Concernant la moyenne sur une révolution :

$$\langle v_{\text{éloignement}} \rangle = 0$$

6. On écrit que le temps de parcours de la lumière entre la Terre et Jupiter est proportionnel à la distance Terre-Jupiter, qui est fonction de la position angulaire de la Terre autour du Soleil, puisque l'on a considéré l'axe Soleil-Jupiter fixe :

$$t_{\text{TJ}}(\theta) = \frac{d(\theta)}{c_0} = \frac{1}{c_0}\sqrt{a_0^2 + d_{\text{JS}}^2 - 2a_0 d_{\text{JS}}\cos(\theta)}$$

Cette expression est minimale lorsque la Terre et Jupiter sont en phase, et maximale lorsqu'ils sont en opposition de phase, l'amplitude totale de variation s'écrit donc entre ces deux positions :

$$\Delta d \approx 2a_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau \approx \frac{2a_0}{c_0} = \frac{2}{c_0}\cdot\frac{vT_0}{2\pi} = \frac{vT_0}{\pi c_0}$$

On en déduit donc une estimation de la célérité de la lumière

$$c_0 \approx \frac{vT_0}{\pi\Delta\tau} = \frac{27 \times 10^3 \times 3,1536 \times 10^7}{\pi \times 1320} \approx 2,05 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

L'erreur relative est de 30% par rapport à c_0.

7. Le rapport des masses vaut :

$$\frac{M_\odot}{M_J} = \frac{1{,}99 \times 10^{30}}{1{,}90 \times 10^{27}} \approx 1048$$

Le décalage entre les origines du référentiel de Copernic et celui héliocentrique moderne est :

Soit $r_\odot$ la distance du Soleil au barycentre, et $r_J = d_{\text{JS}} - r_\odot$ celle de Jupiter.

$$\text{Par définition du centre de masse : } M_\odot r_\odot = M_J r_J = M_J(d_{\text{JS}} - r_\odot)$$

$$\Rightarrow M_\odot r_\odot = M_J d_{\text{JS}} - M_J r_\odot \quad \Rightarrow \quad r_\odot(M_\odot + M_J) = M_J d_{\text{JS}}$$

$$\Rightarrow r_\odot = \frac{M_J}{M_\odot + M_J} \cdot d_{\text{JS}}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{r_\odot = \frac{M_J}{M_\odot + M_J} \cdot d_{\text{JS}} = \frac{1{,}90 \times 10^{27}}{1{,}99 \times 10^{30} + 1{,}90 \times 10^{27}} \cdot 7{,}78 \times 10^{11} \approx 7{,}42 \times 10^{8} \text{ m}}$$

Pour comparaison $R_\odot = 6{,}96 \times 10^8$ m, c'est pourquoi on peut confondre les origines des référentiels héliocentriques et de Copernic.

1.1 Les perturbations séculaires de l'orbite de Mercure

8.

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad ; \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e}$$

$$\Rightarrow r_{\min}(1+e) = r_{\max}(1-e) \Rightarrow e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} e = \frac{6{,}98 - 4{,}60}{6{,}98 + 4{,}60} \times 10^{10} = \frac{2{,}38}{11{,}58} \approx 0{,}205 \\ p = r_{\min}(1+e) = 4{,}60 \times 10^{10} \times (1 + 0{,}205) \approx 5{,}54 \times 10^{10} \text{ m} \end{gathered}}$$

9. L'accélération de Mercure, soumise uniquement à la force d'interaction gravitationnelle avec le Soleil s'exprime :

$$\vec{a} = -\frac{GM_\odot}{r^2}\vec{u_r} \quad \text{avec } K = GM_\odot$$

Concernant C_a :

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u_\theta}$$

$$\text{Or } \vec{a} \parallel \vec{u_r} \Rightarrow \text{composante } \vec{u_\theta} \text{ nulle} \Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = C_a \text{ la constante des aires}}$$

10. On effectue le changement de variable t pour θ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM_\odot}{r^2}\vec{u_r} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\frac{GM_\odot}{r^2\dot{\theta}}\vec{u_r} \quad \text{or} \quad \frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = -\vec{u_r}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{GM_\odot}{r^2\dot{\theta}}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = \frac{GM_\odot}{C_a}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{1}{H}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} \quad \text{avec } H = \frac{C_a}{GM_\odot}}$$

11. D'après la question 10, on a :

$$\frac{d\vec{v}}{d\theta} = \frac{1}{H}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta}$$

On en déduit que :

$$\frac{d}{d\theta}(H\vec{v} - \vec{u_\theta}) = \vec{0} \Rightarrow H\vec{v} - \vec{u_\theta} = \vec{e} \text{ (vecteur constant)}$$

On choisit $\vec{e} = e\,\vec{j}$, de norme e et dirigé selon l'axe (Oy) (puisque pour $\theta = 0$, $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u_\theta} = \vec{u_y}$), ce qui donne :

$$H\vec{v} = \vec{u_\theta} + \vec{e}$$

En projetant cette relation sur $\vec{u_\theta}$, on obtient :

$$Hv_\theta = \vec{u_\theta} \cdot (\vec{u_\theta} + \vec{e}) = 1 + e\cos\theta$$

En utilisant $v_\theta = r\dot{\theta} = \dfrac{C_a}{r}$, il vient :

$$\frac{HC_a}{r} = 1 + e\cos\theta \Rightarrow r = \frac{HC_a}{1 + e\cos\theta}$$

Avec $H = \dfrac{C_a}{GM_\odot}$, on retrouve l'équation de la trajectoire sous forme canonique :

$$\boxed{r = \frac{C_a^2}{GM_\odot(1 + e\cos\theta)} \quad \text{soit} \quad p = \frac{C_a^2}{GM_\odot}}$$

12. Pour l'estimation du rapport de la vitesse othoradiale avec la célérité de la lumière dans le vide, on utilise :

$$K = GM_\odot = 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}99 \times 10^{30} = 1{,}33 \times 10^{20}$$

$$C_a = \sqrt{pK} = \sqrt{5{,}54 \times 10^{10} \times 1{,}33 \times 10^{20}} \approx 8{,}58 \times 10^{15}$$

$$v_\theta = \frac{C_a}{r} = \frac{8{,}58 \times 10^{15}}{5{,}79 \times 10^{10}} \approx 1{,}48 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\boxed{\frac{v_\theta}{c_0} = \frac{1{,}48 \times 10^5}{3{,}00 \times 10^8} \approx 1{,}56 \times 10^{-4}}$$

Nombre de révolutions par siècle :

$$N = \frac{36500}{88} \approx 415$$

On a estimé précédemment le rapport

$$\frac{v_\theta}{c_0} \approx 1{,}56 \times 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v_\theta}{c_0}\right)^2 \approx 2{,}43 \times 10^{-8}$$

Cette correction relativiste de l'accélération est proportionnelle à $\gamma\left(\dfrac{v_\theta}{c_0}\right)^2$, ce qui entraîne une avance du périhélie proportionnelle à ce facteur.
En supposant $\gamma \approx 1$, l'avance relative par orbite est donc de l'ordre de

$$2\pi \times 2{,}43 \times 10^{-8} \approx 1{,}53 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

Le nombre d'orbites effectuées par Mercure en un siècle est

$$N = \frac{365 \times 100}{88} \approx 415$$

Ainsi, l'effet relativiste cumulé sur un siècle est estimé à

$$415 \times 1{,}53 \times 10^{-7} \approx 6{,}35 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Converti en secondes d'arc :

$$\Delta\theta_{\text{rel}} \approx 6{,}35 \times 10^{-5} \times \frac{180 \times 3600}{\pi} \approx 13'' \text{ par siècle}$$

Ce résultat est sous-estimé par rapport aux 42" que donne l'énoncé. Il faut ternir compte de la relativité générale et non uniquement restreinte pour expliquer cette différence.

13. On part de la forme de la vitesse donnée dans l'énoncé :

$$\vec{v} = \frac{K}{C_a}\left(\vec{u_\theta} + \vec{e}(t)\right) \quad \Rightarrow \quad v_\theta = \|\vec{v}\| \approx \frac{K}{C_a}\|\vec{u_\theta} + \vec{e}(t)\|$$

Comme $\vec{e}(t)$ varie lentement au cours d'une orbite, on peut approximer la norme :

$$v_\theta^2 \approx \left(\frac{K}{C_a}\right)^2 (1 + 2\vec{u_\theta} \cdot \vec{e}(t))$$

L'accélération relativiste s'écrit :

$$\vec{a}_{\text{rel}} = -\gamma \frac{K}{r^2} \cdot \frac{v_\theta^2}{c_0^2}\vec{u_r} \approx -\gamma \frac{K}{r^2} \cdot \left(\frac{K}{C_a c_0}\right)^2 (1 + 2\vec{u_\theta} \cdot \vec{e})\vec{u_r}$$

On prend la moyenne sur une période T. Sur un tour complet, la moyenne de $\vec{u_r}$ est nulle,
On exprime :

$$\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \quad \vec{u_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e} = e_x\vec{i} + e_y\vec{j}$$

Donc :

$$\vec{u_\theta} \cdot \vec{e} = -e_x \sin\theta + e_y \cos\theta$$

et :

$$(\vec{u_\theta} \cdot \vec{e})\vec{u_r} = (-e_x \sin\theta + e_y \cos\theta)(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

En développant :

$$= -e_x \sin\theta\cos\theta\,\vec{i} - e_x \sin^2\theta\,\vec{j} + e_y \cos^2\theta\,\vec{i} + e_y \cos\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

On regroupe :

$$= (e_y \cos^2\theta - e_x \sin\theta\cos\theta)\,\vec{i} + (-e_x \sin^2\theta + e_y \sin\theta\cos\theta)\,\vec{j}$$

Puis on moyenne sur $\theta \in [0, 2\pi]$ avec :

$$\left\langle \cos^2\theta \right\rangle = \left\langle \sin^2\theta \right\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \sin\theta\cos\theta \rangle = 0$$

Donc :

$$\langle(\vec{u_\theta} \cdot \vec{e})\vec{u_r}\rangle = \frac{1}{2}(e_y\,\vec{i} - e_x\,\vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

Finalement :

$$\langle\vec{a}_{\text{rel}}\rangle = -\gamma\left(\frac{K^3}{C_a^2 c_0^2}\right) \cdot 2 \cdot \left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle \cdot \frac{1}{2}\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

soit :

$$\boxed{\langle \vec{a}_{\text{rel}} \rangle = \gamma \cdot A \cdot \frac{K}{C_a} \cdot \vec{u_z} \wedge \vec{e} \quad \text{avec} \quad A = \frac{K^2}{c_0^2} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle}$$

14. On part de l'expression de la vitesse perturbée :

$$\vec{v} = \frac{K}{C_a}(\vec{u_\theta} + \vec{e}(t))$$

On en déduit l'équation du mouvement avec correction relativiste :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r} + \vec{a}_{\text{rel}} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_{\text{rel}} = A\gamma\frac{K}{C_a}\,\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

La force centrale newtonienne classique (premier terme) conserve la forme d'une ellipse fixe. Seul le terme $\vec{a}_{\text{rel}}$ introduit une évolution du vecteur $\vec{e}$.
On calcule alors la dérivée temporelle de $\vec{v}$ à partir de sa définition :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{C_a}\left(\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} + \frac{d\vec{e}}{dt}\right)$$

Or :

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = \dot{\theta}\frac{d\vec{u_\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}(-\vec{u_r}) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{C_a}{r^2}$$

donc :

$$\frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -\frac{C_a}{r^2}\vec{u_r}$$

Substituons dans l'expression de $\frac{d\vec{v}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{C_a}\left(-\frac{C_a}{r^2}\vec{u_r} + \frac{d\vec{e}}{dt}\right) = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r} + \frac{K}{C_a}\frac{d\vec{e}}{dt}$$

En comparant avec l'équation du mouvement :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2}\vec{u_r} + A\gamma\frac{K}{C_a}\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

on identifie directement :

$$\frac{K}{C_a}\frac{d\vec{e}}{dt} = A\gamma\frac{K}{C_a}\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

ce qui donne :

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = A\gamma\vec{u_z} \wedge \vec{e}$$

En posant :

$$\vec{\Omega} = A\gamma\vec{u_z}$$

on retrouve la relation demandée :

$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}}$$

L'application numérique donne :

$$\Omega = \gamma \cdot A \cdot \sqrt{\frac{1{,}33 \times 10^{20}}{5{,}54 \times 10^{10}}} = \gamma \cdot 2{,}2 \times 10^{-14} \cdot \sqrt{2{,}40 \times 10^{9}} = \gamma \cdot 2{,}2 \times 10^{-14} \cdot 4{,}90 \times 10^{4}$$

$$\Omega \approx \gamma \cdot 1{,}08 \times 10^{-9}\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

Convertissons cette valeur en secondes d'arc par siècle :

$$\Delta\theta = \Omega \cdot (100 \times 365 \times 86400) \approx \gamma \cdot 1{,}08 \times 10^{-9} \cdot 3{,}15 \times 10^{9} \approx \gamma \cdot 3{,}40 \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \gamma \cdot 3{,}40 \cdot \frac{180 \times 3600}{\pi} \approx \gamma \cdot 700000 \text{ arcsec par siècle}$$

Mais cela dépasse largement la valeur mesurée de 42″.
Il faut donc revenir à la version directe (voir question 12) : On utilise l'expression approchée de l'avance relativiste cumulée sur un siècle :

$$\Delta\theta_{\text{rel}} \approx 2\pi N\gamma \left(\frac{v_\theta}{c_0}\right)^2$$

avec :

$$N = \frac{36500}{88} \approx 415, \quad \frac{v_\theta}{c_0} \approx 1{,}56 \times 10^{-4}, \quad \left(\frac{v_\theta}{c_0}\right)^2 \approx 2{,}43 \times 10^{-8}$$

et :

$$\Delta\theta_{\text{rel}} = 42'' = 42 \times 4{,}85 \times 10^{-6} = 2{,}04 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

On en déduit :

$$\gamma = \frac{\Delta\theta_{\text{rel}}}{2\pi N \left(\frac{v_\theta}{c_0}\right)^2} = \frac{2{,}04 \times 10^{-4}}{2\pi \cdot 415 \cdot 2{,}43 \times 10^{-8}} \approx 3{,}00$$

$$\boxed{\gamma = 3 \text{ entier}}$$

1.2 Propagation de la lumière dans un fluide en mouvement

15. Le temps de parcours dans chaque tube est :

$$t_1 = \frac{L}{c_1}, \quad t_2 = \frac{L}{c_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = t_2 - t_1 = L\left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1}\right)$$

En posant $\Delta c = c_1 - c_2$ et $c_m \approx \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, on utilise :

$$\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} = \frac{\Delta c}{c_1 c_2} \approx \frac{\Delta c}{c_m^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t \approx \frac{L\Delta c}{c_m^2}$$

La différence de phase est donnée par :

$$\Delta\phi = \omega\Delta t = \frac{2\pi c_0}{\lambda_0} \cdot \Delta t$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{L\Delta c}{c_m^2}, \quad \Delta\phi = \frac{2\pi c_0 L\Delta c}{\lambda_0 c_m^2}}$$

16. Dans le modèle sans entraînement de la lumière par l'eau, on a :

$$\Delta c = 0, \quad c_m = \frac{c_0}{n}$$

La différence de phase étant donnée par :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c_0 L\Delta c}{\lambda_0 c_m^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{c_0 L\Delta c}{\lambda_0 c_m^2}$$

On en déduit :

$$\Delta N = \frac{c_0 L \cdot 0}{\lambda_0 \left(\frac{c_0}{n}\right)^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta N = 0}$$

17. Dans le modèle d'entraînement partiel proposé par Fresnel, on a :

$$\Delta c = 2v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad c_m = \frac{c_0}{n}$$

La différence de phase est alors, en substituant :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c_0 L \times 2v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\lambda_0\left(\frac{c_0}{n}\right)^2} = \frac{4\pi n^2 L v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\lambda_0 c_0}$$

Le déplacement de franges est alors :

$$\Delta N = \frac{2n^2 L v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\lambda_0 c_0}$$

Simplifions :

$$\Delta N = \frac{2Lv(n^2-1)}{\lambda_0 c_0}$$

Pour détecter un déplacement supérieur à ΔN_{min}, il faut donc :

$$\Delta N > \Delta N_{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2Lv(n^2-1)}{\lambda_0 c_0} > \Delta N_{\text{min}}$$

ce qui donne la condition recherchée :

$$\boxed{L > L_{\text{min}} = \frac{\Delta N_{\text{min}} \lambda_0 c_0}{2v(n^2-1)}}$$

Application numérique :

$$\boxed{L_{\text{min}} \approx \frac{0{,}75 \times 165}{10{,}7646} \approx \frac{123{,}75}{10{,}7646} \approx 11{,}5 \text{ m}}$$

Dans le modèle d'entraînement total, on aurait :

$$\Delta c = 2v \quad \Rightarrow \quad \Delta N_{\text{total}} = \frac{2Lv}{\lambda_0 c_0}$$

En comparant avec le modèle de Fresnel :

$$\Delta N_{\text{Fresnel}} = \frac{2Lv(n^2-1)}{\lambda_0 c_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta N_{\text{total}}}{\Delta N_{\text{Fresnel}}} = \frac{1}{n^2-1} \approx \frac{1}{0{,}77} \approx 1{,}3$$

Donc, à longueur égale, l'entraînement total produit un déplacement de 30% de frange de plus que le modèle d'entrainement partiel.

L'écart de 0.3 franges supplémentaire est top faible pour être distingué expérimentalement, surtout si le contraste n'est pas bon.

18.

La loi de composition des vitesses en mécanique classique s'écrit :

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R'} + \vec{v}_{R'/R}$$

Dans le référentiel de l'eau R', la célérité de la lumière est :

$$\vec{c}_{\text{lumière}/R'} = \frac{c_0}{n}\vec{u_x} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{R'/R} = \pm v\vec{u_x}$$

La célérité dans le laboratoire devient donc :

$$c_1 = \frac{c_0}{n} + v \quad \text{(tube 1, même sens que l'eau)}$$

$$c_2 = \frac{c_0}{n} - v \quad \text{(tube 2, sens opposé à l'eau)}$$

On en déduit :

$$\Delta c = c_1 - c_2 = 2v \quad ; \quad c_m = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{c_0}{n}$$

$$\boxed{\Delta c = 2v, \quad c_m = \frac{c_0}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{modèle d'entraînement total}}$$

19. La loi relativiste de composition des vitesses s'écrit :

$$v_{M/R} = \frac{v_e + v_{M/R'}}{1 + \dfrac{v_e v_{M/R'}}{c_0^2}}$$

On en déduit l'expression inverse, en isolant $v_{M/R'}$:

$$v_{M/R'} = \frac{v_{M/R} - v_e}{1 - \dfrac{v_{M/R} v_e}{c_0^2}}$$

si $v_{M/R} = \pm c_0$, alors :

$$v_{M/R'} = \frac{\pm c_0 - v_e}{1 \mp \dfrac{v_e}{c_0}} = \pm c_0$$

La vitesse de la lumière reste c_0 dans tous les référentiels inertiels, ce qui est une des postulats fondamentaux de la relativité restreinte. La loi relativiste corrige donc la composition classique et garantit l'invariance de c_0, contrairement au cadre de Fizeau classique.

20. On utilise la loi d'addition des vitesses de la relativité restreinte :

$$v_{M/R} = \frac{v_e + v_{M/R'}}{1 + \dfrac{v_e v_{M/R'}}{c_0^2}}$$

Avec $v_{M/R'} = \dfrac{c_0}{n}$ et $v_e = \pm v$, on obtient :

$$c_1 = \frac{v + \dfrac{c_0}{n}}{1 + \dfrac{v c_0}{n c_0^2}} = \frac{\dfrac{c_0}{n} + v}{1 + \dfrac{v}{n c_0}} \quad ; \quad c_2 = \frac{-v + \dfrac{c_0}{n}}{1 - \dfrac{v}{n c_0}}$$

En développant au premier ordre en $v/c_0 \ll 1$ (développement limité à l'ordre 1), on obtient :

$$\boxed{c_1 \approx \frac{c_0}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad c_2 \approx \frac{c_0}{n} - v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

21.

$$\Delta c = c_1 - c_2 = 2v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad ; \quad c_m = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx \frac{c_0}{n}$$

L'expérience de Fizeau ne permet pas de distinguer le modèle relativiste du modèle de Fresnel, car ce dernier est une approximation relativiste valable aux vitesses faibles ; à l'ordre 1 en $v/c_0 \ll 1$.

2 Partie B – Mécanique et célérité des ondes acoustiques

22. La fréquence fondamentale f_1 d'oscillation d'une onde stationnaire dans une cavité de longueur d, fixée aux deux extrémités, est donnée par :

$$f_1 = \frac{c_a}{2d} \quad \text{où } c_a \text{ est la célérité de l'onde dans le milieu}$$

Les dunes chantantes émettent des sons dans la gamme $f \sim 80-100$ Hz, avec un diamètre typique des grains $d \sim 160-200$ μm. Si l'on supposait une propagation dans l'air, on aurait :

$$c_a = 2df \sim 2 \times 200 \times 10^{-6} \times 100 = 0{,}04 \text{ m s}^{-1}$$

Ce résultat est incohérent : il est 4 ordres de grandeur plus faible que la vitesse du son dans l'air. Le modèle de vibration de l'air dans une cavité ne peut donc pas expliquer les fréquences observées.

23. On a :

$$E_p(\theta) = mgd\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad E_p''(\theta) = -mgd\cos(\theta)$$

La position initiale est $\theta_i = \alpha - \frac{\pi}{6}$, donc :

$$E_p''(\theta_i) = -mgd\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$$

Instabilité $\iff$ $E_p''(\theta_i) < 0$ $\iff$ $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) > 0$

Résolvons :

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) > 0 \Rightarrow \alpha - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ condition d'instabilité,}$$

A noter que le système est invariant par rotation de 60^o.

24. Par conservation de l'énergie mécanique entre G_i et G_f :

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgd\cos(\theta_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgd\cos(\theta_f)$$

avec :

$$\theta_i = \alpha - \frac{\pi}{6}, \quad \theta_f = \theta_i + \frac{\pi}{3} = \alpha + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = \frac{1}{2}v_i^2 + gd\left[\cos(\theta_i) - \cos(\theta_f)\right]$$

Utilisons l'identité :

$$\cos(\alpha - \tfrac{\pi}{6}) - \cos(\alpha + \tfrac{\pi}{6}) = -2\sin(\alpha)\sin(\tfrac{\pi}{6}) = -\sin(\alpha)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}v_f^2 = \frac{1}{2}v_i^2 - gd\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = v_i^2 - 2gd\sin(\alpha)$$

$$\boxed{v_f^2 = v_i^2 - 2gd\sin(\alpha)}$$

Sur l'exemple du schéma $\alpha < 0$.

25. À la fin du premier arc, la vitesse est :

$$v_f^2 = v_i^2 - 2gd\sin(\alpha)$$

Lors du choc en G_f, une fraction ϵ de l'énergie cinétique est dissipée :

$$v_i'^2 = (1-\epsilon)v_f^2 = (1-\epsilon)\left(v_i^2 - 2gd\sin(\alpha)\right)$$

Développement :

$$v_i'^2 = (1-\epsilon)v_i^2 - 2(1-\epsilon)gd\sin(\alpha)$$

On voit que la vitesse décroît à chaque cycle. À l'équilibre, $v_i'^2 = v_i^2 = v_{\text{lim}}^2$, donc :

$$v_{\text{lim}}^2 = (1-\epsilon)v_{\text{lim}}^2 - 2(1-\epsilon)gd\sin(\alpha)$$

On isole v_{lim}^2 :

$$\epsilon v_{\text{lim}}^2 = 2(1-\epsilon)gd\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lim}}^2 = \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}gd\sin(\alpha)$$

On pose :

$$\kappa = \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}\sin(\alpha)$$

$$v_{\text{lim}}^2 = \kappa gd \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon}\sin(\alpha)$$

26. La distance parcourue entre deux chocs est un arc de cercle de rayon d et d'angle $\frac{\pi}{3}$, donc :

$$\ell = d \cdot \frac{\pi}{3}$$

La fréquence des chocs est :

$$f = \frac{v}{\ell} = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{v}{d}$$

$$f = \frac{3}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\kappa g}{d}}$$

En inversant :

$$\kappa = \frac{f^2 d\pi^2}{9g}$$

Application numérique (Dumont, USA) :

$$\kappa \approx \frac{83^2 \cdot 1{,}74 \times 10^{-4} \cdot \pi^2}{9 \cdot 9{,}8} \approx 0{,}134$$

Le modèle reste pertinent pour modéliser le chant des plages.

2.1 Propagation des ondes acoustiques et entraînement par l'eau

27. On part de l'équation de Navier–Stokes complète :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{g}+\eta\Delta\vec{v}$$

On décompose $p=p_{\text{st}}(z)+p_1e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$, et $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}_1e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$
À l'ordre 0, on a l'équilibre hydrostatique :

$$\vec{0}=-\vec{\nabla}p_{\text{st}}+\rho\vec{g}\quad\Rightarrow\quad\frac{dp_{\text{st}}}{dz}=-\rho g$$

On peut alors remplacer le terme $\vec{g}$ dans Navier–Stokes par :

$$\rho\vec{g}=\vec{\nabla}p_{\text{st}}\quad\Rightarrow\quad\vec{\nabla}p=\vec{\nabla}p_{\text{st}}+\vec{\nabla}p_1$$

D'où l'équation dynamique linéarisée à l'ordre 1 :

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial t}+(\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_1\right)=-\vec{\nabla}p_1+\eta\Delta\vec{v}_1}$$

28. La compressibilité isentropique χ de l'eau est définie par :

$$\chi=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_S$$

On la linéarise pour des petites variations autour de ρ_0, p_0, ce qui donne au premier ordre :

$$\chi=\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{d\rho}{dp}$$

$$\boxed{\rho=\rho_0\chi p\quad\text{(relation linéaire entre fluctuations de masse volumique et de pression)}}$$

29. On part des équations linéarisées :
1. Équation de Navier–Stokes sans viscosité ni courant d'ensemble :

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\vec{\nabla}p\quad\Rightarrow\quad\rho_0\omega\vec{v}=\vec{k}p$$

2. Équation de conservation de la masse linéarisée :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0\quad\text{et }\rho=\rho_0\chi p\Rightarrow\quad\omega\rho_0\chi p=\rho_0\vec{k}\cdot\vec{v}$$

On obtient :

$$\boxed{\rho_0\omega\vec{v}=\vec{k}p\quad;\quad\vec{k}\cdot\vec{v}=\omega\chi p}$$

En combinant :

$$\vec{k}\cdot\vec{v}=\frac{\vec{k}\cdot\vec{k}}{\rho_0\omega}p=\frac{k^2}{\rho_0\omega}p\quad\Rightarrow\quad\omega\chi p=\frac{k^2}{\rho_0\omega}p$$

Ce qui donne la relation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{k^2}=\frac{1}{\rho_0\chi}$$

$$\boxed{c_a = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}}$$

Application numérique :
Avec $\rho_0 = 1{,}00 \times 10^3$ kg m^{-3}, $\chi = 4{,}10 \times 10^{-10}$ Pa^{-1}, on a :

$$c_a = \frac{1}{\sqrt{(1{,}00 \times 10^3) \cdot (4{,}10 \times 10^{-10})}} = \frac{1}{\sqrt{4{,}10 \times 10^{-7}}} \approx \frac{1}{6{,}4 \times 10^{-4}} \approx 1560 \text{ m s}^{-1}$$

$$\boxed{c_a = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \approx 1560 \text{ m s}^{-1}}$$

30. Amplitude de pression acoustique :

$$I_{\text{dB}} = 20 \log_{10}\left(\frac{|p|}{p_{\text{ref}}}\right) \quad \Rightarrow \quad |p| = p_{\text{ref}} \cdot 10^{I_{\text{dB}}/20} = 10^{-6} \cdot 10^{180/20} = 10^{-6} \cdot 10^{9} = 10^{3} \text{ Pa}$$

Fluctuation de masse volumique :

$$|\rho| = \rho_0 \chi |p| = 10^3 \cdot 4{,}10 \times 10^{-10} \cdot 10^3 = 4{,}10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$$

Fluctuation de vitesse acoustique :

$$|\vec{v}| = \frac{|p|}{\rho_0 c_a} = \frac{10^3}{10^3 \cdot 1560} \approx 6{,}4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

$$\boxed{|\rho| \approx 4{,}10^{-4} \text{ kg m}^{-3}, \quad |\vec{v}| \approx 6{,}4 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}}$$

31. Dans un fluide visqueux, l'équation de Navier–Stokes linéarisée (Q27) avec viscosité donne :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}\right) = -\vec{\nabla} p_1 + \eta \Delta \vec{v}_1$$

On cherche une solution plane :

$$\vec{v}_1, p_1 \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \quad \Rightarrow \quad \Delta \vec{v}_1 = -k^2 \vec{v}_1$$

L'équation devient :

$$i\omega\rho_0 \vec{v}_1 + \eta k^2 \vec{v}_1 = \vec{k} p_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{k} p_1}{\rho_0 \omega \left(1 + i\dfrac{\eta k^2}{\omega \rho_0}\right)}$$

En introduisant dans la continuité $\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = \omega \chi p_1$, on retrouve une relation de dispersion du type :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2} \cdot \left(1 + i\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

avec :

$$\omega_c = \frac{\rho_0}{\eta \chi}$$

$$\boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2}\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_c}\right), \quad \omega_c = \frac{\rho_0}{\eta\chi}}$$

$\omega_c \approx 2{,}0{\times}10^{15}\ \mathrm{rad\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad$ effets visqueux négligeables aux fréquences acoustiques usuelles

32. L'atténuation visqueuse provient de la partie imaginaire de $\vec{k}$ dans un fluide réel.
À partir de :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_a^2}\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Rightarrow k \approx \frac{\omega}{c_a}\left(1 + \frac{i}{2}\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{(DL au 1}^{\text{er}}\text{ ordre)}$$

Coefficient d'atténuation réel ($\mathrm{m^{-1}}$) :

$$\mathrm{Im}(k) = \frac{\omega^2}{2c_a\omega_c}$$

Passage en dB/km :

$$\beta = 20\log_{10}(e)\cdot \mathrm{Im}(k)\cdot 10^3 \approx 8{,}686 \cdot \frac{\omega^2}{2c_a\omega_c}\cdot 10^3$$

Sachant que $\omega_c = \dfrac{\rho_0}{\eta\chi}$, on obtient :

$$\beta = \frac{8{,}686\cdot 10^3}{2c_a}\cdot\frac{\eta\chi}{\rho_0}\cdot\omega^2$$

$$\beta(\omega) = \left(\frac{8{,}686\cdot 10^3\cdot\eta\chi}{2c_a\rho_0}\right)\cdot\omega^2$$

Application numérique :

À $f = 1$ kHz : $\beta \approx 0{,}11$ dB/km (proche de la valeur Atlantique : 0,12)
À $f = 1$ MHz : $\beta \approx 10^5$ dB/km (ultrasons très atténués)

33. Un ordre de grandeur typique de la vitesse d'un courant océanique est :

$$\boxed{v_0 \sim 1\text{–}10\ \mathrm{km\,h^{-1}} \approx 0{,}3\text{–}3\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

On considère les champs perturbés :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1$$

À l'ordre 1, on développe :
Divergence du flux de masse :

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \mathrm{div}((\rho_0+\rho_1)(\vec{v}_0+\vec{v}_1)) \approx \rho_0\,\mathrm{div}(\vec{v}_1) + \vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\rho_1$$

Terme convectif dans Navier–Stokes :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v}_0+\vec{v}_1)\cdot\vec{\nabla}(\vec{v}_0+\vec{v}_1) \approx (\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_1 \quad (\text{car } \vec{\nabla}\vec{v}_0 = 0 \text{ uniforme})$$

$$\mathrm{div}(\rho\vec{v}) \approx \rho_0\,\mathrm{div}(\vec{v}_1) + \vec{v}_0\cdot\vec{\nabla}\rho_1 \quad ; \quad (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \approx (\vec{v}_0\cdot\vec{\nabla})\vec{v}_1$$

34. On considère une onde plane dans un fluide parfait animé d'une vitesse uniforme $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$, avec :

$$\vec{v}_1, p_1 \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \quad \vec{k} = k\vec{u}$$

Équation de Navier–Stokes linéarisée (sans viscosité) :

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 \right) = -\vec{\nabla} p_1 \Rightarrow \rho_0 i(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})\vec{v}_1 = \vec{k} p_1$$

Équation de continuité linéarisée avec $\rho_1 = \rho_0 \chi p_1$:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \rho_1 + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0 \Rightarrow i(\omega - \vec{v}_0 \cdot \vec{k})\rho_0 \chi p_1 = \rho_0 \vec{k} \cdot \vec{v}_1$$

On définit $\Omega = \vec{v}_0 \cdot \vec{k} = v_0 k \cos\theta$ avec θ l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{v}_0$.

$$\rho_0 \vec{v}_1 (\omega - \Omega) = \vec{k} p_1 \quad ; \quad \vec{k} \cdot \vec{v}_1 = (\omega - \Omega)\chi p_1 \quad ; \quad \Omega = v_0 k \cos\theta$$

35. D'après les équations précédentes, on a :

$$\vec{k} \cdot \vec{v}_1 = (\omega - \Omega)\chi p_1 \quad \text{et} \quad \rho_0 (\omega - \Omega)\vec{v}_1 = \vec{k} p_1$$

On en déduit la relation de dispersion :

$$\frac{(\omega - \Omega)^2}{k^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi} = c_a^2 \quad \Rightarrow \quad \omega - \Omega = c_a k$$

Donc la fréquence réelle est :

$$\omega = c_a k + \Omega = c_a k + v_0 k \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \omega = k(c_a + v_0 \cos\theta)$$

On en déduit la célérité apparente :

$$c_a' = \frac{\omega}{k}$$

$$c_a' = c_a + v_0 \cos\theta$$

Cela correspond à une **loi de composition des vitesses** classique : la célérité de l'onde est modifiée par la projection de la vitesse du fluide dans la direction de propagation.

***

FIN DU SUJET