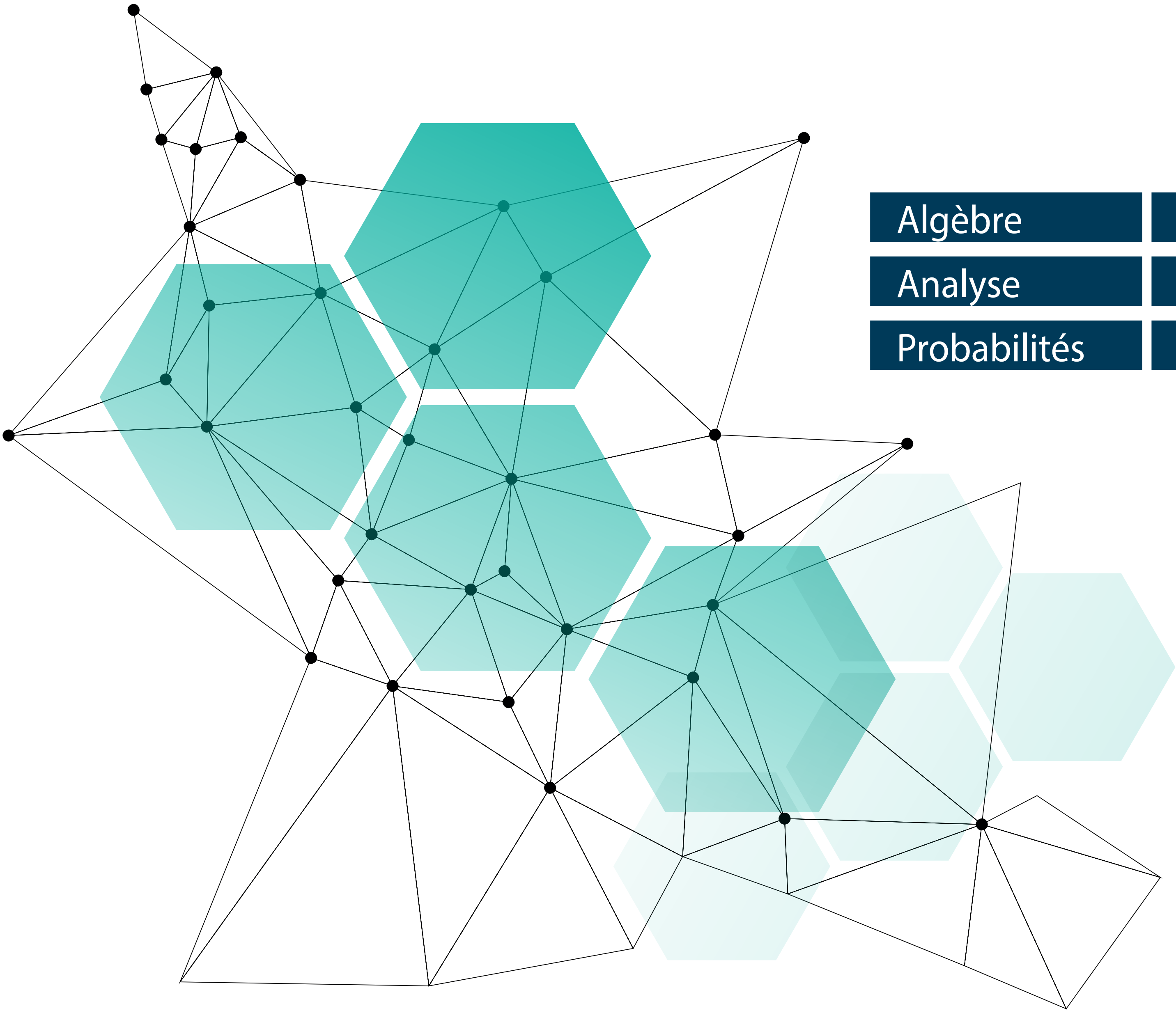
DÉCOUVREZ L'EXCELLENCE

Optimal Sup-Spé

Groupe Ipesup ▪ Le n°1 en Sup-Spé

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Maths SPE - Concours scientifiques



- Algèbre
- Analyse
- Probabilités

www.optimalsupspe.fr

SOMMAIRE

Edito

MP, PC, PSI, MPI, PT - Concours Scientifiques

Formulaire Maths Spé

L'équipe pédagogique d'Optimal Sup Spé a le plaisir de vous offrir le présent formulaire de mathématiques. Un grand merci à tous les professeurs qui y ont contribué. Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques de deuxième année.

Point méthode

Utiliser le formulaire.

Ce formulaire est un outil pour vous permettre de réviser vos définitions, vos formules, ainsi que les théorèmes les plus importants du cours de deuxième année de prépa scientifique. Pour travailler sur un chapitre, vous pouvez, dans l'ordre : 1/réviser les cours de vos professeurs de prépa, 2/visionner les vidéos pédagogiques correspondantes d'Optimal Sup-Spé, et 3/réviser l'ensemble à l'aide du formulaire. En résumé, le formulaire ne vous dispense pas de bien connaître et comprendre votre cours ainsi que les démonstrations les plus importantes. Retrouvez les vidéos pédagogiques d'Optimal Sup-Spé sur notre site internet : www.optimalsupspe.fr/cours-prepa, sur notre application mobile Optimal Sup-Spé disponible sur les stores. Bon travail à toutes et à tous.

Cours prépa **Appli - Apple** **Appli - Androïd**

Ensembles, applications, sommes

Partition. $\{A_i\}_{i\in I}$ est une partition de Ω si :

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
- $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Ensemble stable. A est stable par f si : $f(A) \subset A$, i.e. si : $\forall x \in A, f(x) \in A$.

Relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
- $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall (x,y) \in E^2$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow xRz$,
- $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Relation d'équivalence. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si :

- $\mathcal{R}$ est *réflexive*,
- $\mathcal{R}$ est *transitive*,
- $\mathcal{R}$ est *symétrique* : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Image directe. Avec $f : E \to F$ et $A \subset E$: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ f(x) = y\}$.

Image réciproque. Avec $f : E \to F$ et $B \subset F$: $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid\ f(x) \in B\}$.

Injections, surjections, bijections. Avec $f : E \to F$:

- f est *injective* si : $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- f est *surjective* si : $\forall y \in F,\ \exists x \in E, f(x) = y$.
- f est *bijective* si elle est injective et surjective, i.e. si : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E, f(x) = y$.
- Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives (resp. surjectives, resp. bijectives), alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective)

Sommes. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Formule du binôme. $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Addition. Pour tous réels a et b :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Duplication. Pour tout réel x :

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ sous réserve d'existence (à savoir redémontrer, de même que les formules ci-dessous).

Tangente de l'arc moitié. Avec $t = \tan \dfrac{x}{2}$, on a : $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Transformation de sommes en produits. Pour tous réels p et q :

- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

Structures algébriques

Loi de composition interne. Une application $* : E \times E \to E$ est appelée **loi de composition interne** sur E. On note $(E, *)$ l'ensemble E muni de la loi de composition interne $*$. E est **l'ensemble sous-jacent** de $(E, *)$.

Groupe. Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un **groupe** si :
- la loi $*$ est **associative** : $\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z)$,
- G admet un **élément neutre** pour la loi $*$: $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x)$,
- tout élément de G est **inversible**, i.e. admet un **symétrique**) pour la loi $*$: $\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e$.

Sous-groupe. $H \subset G$ est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si :
- H contient l'**élément neutre** de G pour la loi $*$,
- H est **stable** pour la loi $*$ $(\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H)$,
- $\forall a \in H, a^{-1} \in H$.

Caractérisation d'un sous-groupe : H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :
- H est non vide,
- $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

Groupe commutatif. G est un groupe **commutatif** si la loi $*$ est **commutative** : $\forall (x, y) \in G^2, x * y = y * x$. La loi de composition est alors souvent notée $+$.

Groupe cyclique. Un groupe G est **cyclique** s'il est de cardinal fini (ie. admet un nombre fini d'élements), et admet un générateur $g \in G$: $\forall x \in G$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x = g^n$ où $g^n = \underbrace{g \cdot g \cdots g}_{n \text{ fois}}$

Morphisme de groupe. f est un **morphisme de groupes**, ou **homomorphisme**, de $(G_1, *_1)$ sur $(G_2, *_2)$ si : $\forall (x, y) \in G_1^2, f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$. On dit que f est un **isomorphisme** de groupe si f est de plus **bijective**.

Anneau. Un ensemble A non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un anneau si :
- $(A, +)$ est un **groupe commutatif**,
- la loi $*$ est **associative** et **distributive** par rapport à la loi $+$:$\forall a, b, c \in A$, $a*(b+c) = a*b+a*c$ et $(a+b)*c = a * c + b * c$,
- A admet un **élément neutre** pour la loi $*$.

Anneau commutatif Un anneau est dit commutatif quand la loi multiplicative l'est.

Sous-anneau. $B \subset A$ est un **sous-anneau** de $(A, +, *)$ si :
- B est un **sous-groupe** de $(A, +)$:
- $\forall (x, y) \in B^2$, $(x + (-y)) \in B$ (où $(-y)$ désigne le symétrique de y pour la loi $+$)
- B est **stable** pour la loi $*$ $(\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B)$,
- B contient l'**élément neutre** de A pour la loi $*$.

Idéaux. Une partie non vide I d'un anneau commutatif $(A, +, *)$ est un **idéal** de A si :
- I est stable pour la loi $+$,
- $\forall (a, i) \in A \times I, (a * i) \in I$ et $(i * a) \in I$.

Intégrité. Un anneau $(A, +, *)$ est dit **intègre** s'il est **non nul** $(0_A \neq 1_A$ ie. $A \neq \{0_A\})$, **commutatif** et si : $\forall (a, b) \in A^2, a * b = 0_A \implies a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Corps. Un ensemble K non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un **corps** si :
- $(K, +, *)$ est un **anneau** non réduit à $\{0_K\}$, où $\{0_K\}$ est l'élément neutre de K pour la loi $+$.
- la loi $*$ est **commutative**,
- tout élément de $K \backslash \{0_K\}$ admet un **symétrique** pour la loi $*$.

Sous-corps. $L \subset K$ est un **sous-corps** de $(K, +, *)$ si :
- L est un **sous-anneau** de $(K, +, *)$,
- $(L, +, *)$ est un **corps**.

Structures algébriques : approfondissement

Relation de congruence dans $\mathbb{Z}$.

— Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont exactement les sous-ensembles $n\mathbb{Z} = \{nk, \mid k \in \mathbb{Z}\}$, où $n \in \mathbb{N}$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux entiers relatifs a et b sont **congrus modulo** n si, et seulement si, $a - b \in n\mathbb{Z}$. On note alors $a \equiv b$ modulo n.
— La condition précédente est équivalente à a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.
— Si $a \equiv b$ modulo n et $a' \equiv b'$ modulo n alors $-a \equiv -b$ modulo n, $a + a' \equiv b + b'$ modulo n et $aa' \equiv bb'$ modulo n.

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ et anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.

— La relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**.
— La **classe d'équivalence** d'un entier k est définie par : $\mathrm{cl}(k) = \{l \in \mathbb{Z} \mid k \equiv l \text{ modulo } n\}$. On peut alors définir l'ensemble des classes d'équivalence modulo n, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathrm{cl}(0), \mathrm{cl}(1), ..., \mathrm{cl}(n-1)\}$.
— L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un **groupe commutatif** pour la loi $+$ définie par $\mathrm{cl}(k) + \mathrm{cl}(k') = \mathrm{cl}(k + k')$.
— L'application $\pi : k \mapsto \mathrm{cl}(k)$ est un **morphisme surjectif** de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, appelé **surjection canonique**.
— L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un **anneau commutatif** pour la loi $+$ définie par $\mathrm{cl}(a) + \mathrm{cl}(a') = \mathrm{cl}(a + a')$ et la loi $\times$ définie par $\mathrm{cl}(a) \times \mathrm{cl}(a') = \mathrm{cl}(aa')$.

Sous-groupes engendrés par un élément.

— Étant donnés un groupe G et $a \in G$, l'application $\varphi : k \mapsto ka$ (en notation additive) ou $k \mapsto a^k$ (en notation multiplicative) allant de $\mathbb{Z}$ dans G est un morphisme de groupe.
— L'ensemble $\mathrm{Im}(\varphi) = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (en notation additive) ou $\mathrm{Im}(\varphi) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (en notation multiplicative) est le **sous-groupe engendré par** a. On le note aussi $\langle a \rangle$.
— Il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$. Cet entier n est appelé **ordre** de l'élément a.
— Si $n = 0$, alors $\langle a \rangle$ est infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$. Sinon, $\langle a \rangle$ est cyclique, contient n éléments et est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont les classes d'équivalence $\mathrm{cl}(k)$, où $k \in \mathbb{Z}$ est premier avec n.

Morphismes d'anneaux. Soit $(A,+,\times)$ et $(B,+,\times)$ deux anneaux.

— $\varphi : A \to B$ est un **morphisme d'anneau** si : $\varphi(1_A) = 1_B$ et $\forall (a,a') \in A^2, \varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ et $\varphi(a \times a') = \varphi(a) \times \varphi(a')$.
  - Si $A = B$: φ est un **endomorphisme** d'anneau.
  - Si φ est bijective : φ est un **isomorphisme** d'anneau.
  - Si $A = B$ et φ est bijective : φ est un **automorphisme** d'anneau.

— Un morphisme d'anneau φ est **injectif** si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_A\}$.

Idéaux d'un anneau commutatif. Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

— Soit $x \in A$, **l'idéal de** A **engendré par** x est défini par $xA = \{xa \mid a \in A\}$.
— Soit x, y deux éléments d'un anneau *intègre* A, on dit que x **divise** y si, et seulement si, $yA \subset xA$ et on le note $x \mid y$.

Idéaux de $\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

— Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
— L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ dont l'unique générateur positif est appelé **plus grand commun diviseur** (PGCD) de a et b et noté $a \wedge b$.
— L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ dont l'unique générateur positif est appelé **plus petit commun multiple** (PPCM) de a et b et noté $a \vee b$.
— **Théorème de Bézout.** $a \wedge b = 1$ si, et seulement si : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$.
— **Théorème de Gauss.** Si $a \wedge b = 1$ et $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

— $\mathrm{cl}(a) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible pour la loi $\times$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$.
— $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, p est un nombre premier.

Indicatrice d'Euler.

— On appelle fonction **indicatrice d'Euler** la fonction $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ qui à n associe le nombre $\varphi(n)$ d'entiers dans $[\![1, n]\!]$ premiers avec n.
— Calcul de l'indicatrice d'Euler d'un nombre entier :
  - Si p est premier, alors $\varphi(p) = p - 1$ et $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
  - Si $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Morphismes canoniques d'anneaux.

— Il existe un unique **morphisme d'anneaux** $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ défini par $\varphi(k) = k \cdot 1_A = \underbrace{1_A + 1_A + \cdots + 1_A}_{k \text{ fois}}$.
— $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc $\exists! m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(\varphi) = m\mathbb{Z}$. Cet entier m est appelé **caractéristique** de A et est noté $\mathrm{car}(A)$.
— **Factorisation canonique.** Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ un morphisme d'anneau et π la projection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si n est un multiple de $\mathrm{car}(A)$ (ce qui équivaut à $\mathrm{Ker}(\pi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$), alors il existe un unique morphisme $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$ tel que : $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

— Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{K}[X] = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.
— L'ensemble $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X] = \{PU + QV \mid (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ dont l'unique générateur *unitaire* est appelé **plus grand commun diviseur** (PGCD) de P et Q et noté $P \wedge Q$.
— L'ensemble $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ dont l'unique générateur *unitaire* est appelé **plus petit commun multiple** (PPCM) de P et Q et noté $P \vee Q$.
— **Théorème de Bézout.** $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si : $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$, $PU + QV = 1$.
— **Théorème de Gauss.** Si $P \wedge Q = 1$ et $P \mid QR$, alors $P \mid R$.

Arithmétique

Sauf précision, les notations a, b, q, r, u, v représentent toutes des entiers relatifs de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Divisibilité. b est un **diviseur** de a s'il existe q tel que : $a = bq$. On dit aussi "b divise a" ou "a est un multiple de b" et on note $b \mid a$.

Division euclidienne. $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : \exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![\, 0\,,\, b-1 \,]\!], a = bq + r$. On dit alors que : q est le **quotient**, r est le **reste**, a est le **dividende**, b est le **diviseur** de la **division euclidienne.** b divise a si et seulement si : $r = 0$.

PGCD. Avec $H = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et $n = \inf H \cap \mathbb{N}*$, n est le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b. On note : $n = a \wedge b$. On a :

- $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,
- $ab \wedge ac = |a| \times (b \wedge c)$.

PPCM. Il existe un unique entier m tel que : $m = \min(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})$. m est le plus petit commun multiple (PPCM) de a et b. On note : $n = a \vee b$. On a :

- $(a \vee b) \wedge c = a \wedge (b \vee c)$,
- $ab \vee ac = |a|(b \vee c)$.

Théoréme et algorithme d'Euclide. Si $a = bq + r$, on a : $a \wedge b = b \wedge r$. On itère cette relation pour déterminer le PGCD de deux entiers, jusqu'à ce que le reste soit nul ; le PGCD de a et b est alors le dernier reste non nul, comme dans l'exemple suivant :

- $1463 = 1 \times 1078 + 385$,
- $1078 = 2 \times 385 + 308$,
- $385 = 1 \times 308 + 77$,
- $308 = 4 \times 77 + 0$.

ce qui permet de conclure ici que : $1463 \wedge 1078 = 77$.

Entiers premiers entre eux. a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Théorème de Bézout. Si d est un diviseur commun à a et b, avec : $a = da'$ et $b = db'$, alors : $(d = a \wedge b \Leftrightarrow a' \wedge b' = 1)$. Corollaires :

- $(a \wedge (bc) = 1) \Leftrightarrow (a \wedge b = 1 \quad \text{et :} \quad a \wedge c = 1)$,
- $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a^n \wedge b^p = 1$,
- $ab \wedge ac = |a| \wedge (b \wedge c)$.

Algorithme de Bézout. L'objectif de cet algorithme est d'écrire le PGCD de deux entiers en fonction d'une combinaison linéaire de ceux-ci, comme dans l'exemple suivant :

- $77 = 1 \times 385 + (-1) \times 308$,
- $77 = (-1) \times (1078 - 2 \times 385) + 1 \times 385 = (-1) \times 1078 + 3 \times 385$,
- $77 = 3 \times (1463 - 1078) + (-1) \times 1078 = 3 \times 1463 + (-4) \times 1078$,

ce qui permet de conclure ici que : $77 = 1463 \times \mathbf{3} + 1078 \times \textbf{-4}$.

Théorème de Gauss. $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \quad a \mid bc \end{cases} \Longrightarrow a \mid c.$

Nombres premiers. Un nombre $p \in \mathbb{N}$ est dit **premier** si p admet exactement 4 diviseurs : 1, -1, p, et $-p$. Tout entier naturel peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Nombres complexes

Exponentielle complexe. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Les deux écritures d'un nombre complexe non nul.

— $z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$, avec $(a, b, \theta) \in \mathbb{R}^3$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
— $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r\cos\theta - i\,r\sin\theta$. $z\overline{z} = |z|^2$.
— $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r+a}$.

Inégalité triangulaire. $\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Formule de Moivre. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En particulier :

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$.
— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sin n\theta = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$.

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

— $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
— $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Fonction exponentielle complexe. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^{\mathrm{Re}\, z} e^{i\,\mathrm{Im}\, z}$. Pour tous complexes z et z' :

— $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
— $\dfrac{1}{\exp z} = \exp(-z)$.
— $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.
— $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z = z' \equiv 2i\pi$.

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On note : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.\}$. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Racines n^{iemes} de l'unité, groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Avec $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de 1 est l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![\, 0\,,\, n-1\,]\!]\right\}$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Si z est racine de l'unité, $\overline{z}$ l'est aussi.
— **Somme.** $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
— **Produit.** $\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Racines n^{iemes} d'un complexe non nul. Avec $n \geqslant 2$ et $z = re^{i\theta}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de z est l'ensemble $\left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in [\![\, 0\,,\, n-1\,]\!]\right\}$.
— **Somme.** La somme des racines n^{iemes} de z vaut 0.
— **Produit.** Le produit des racines n^{iemes} de z vaut $(-1)^{n-1}z$.

POLYNÔMES

Définitions. Si $P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, P est de degré n, de coefficient dominant a_n, de monôme de plus haut degré $a_n X^n$ et de coefficient constant a_0.

Racines, ordre de multiplicité.

— λ est racine de $P \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda)$ divise P.
— λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow \big((X-\lambda)^k$divise P et $(X-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas $P\big)$.
— λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow \big(\forall i \in [\![\, 0\,,\, k-1 \,]\!] P^{(i)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0)\big)$.

Théorème de D'ALEMBERT. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe. Corollaire : tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, en tenant compte des ordres de multiplicité.

Polynômes irréductibles.

— Un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P n'admet aucun diviseur trivial (i.e. les constantes non nulles et les multiples non nuls de P) dans $\mathbb{K}[X]$.
— Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
— Les polynômes irréductiles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 2 n'admettant aucune racine réelle et les polynômes de degré 1.
— Tout polynôme unitaire s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous forme de produit de polynômes irréductibles (eux-mêmes unitaires).

Polynômes scindés. Un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit sous la forme : $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, où α et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$. On dit que P est scindé à racines simples si les λ_k sont distincts. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α, pour racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, alors : $P(X) = \alpha \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α, pour racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, et pour racines complexes conjuguées $\mu_1, \bar{\mu_1}, \mu_2, \bar{\mu_2}, \ldots, \mu_m, \bar{\mu_m}$, d'ordres de multiplicité respectifs $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, alors : $P(X) = \alpha \left[\prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}\right] \left[\prod_{k=1}^{m} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\mu_k) + |\mu_k|^2\right)^{\beta_k}\right]$.

Formule de TAYLOR pour les polynômes. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \forall a \in \mathbb{C}$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$.

Polynômes d'interpolation de LAGRANGE.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour tout $j \in [\![\, 1\,,\, n \,]\!]$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![\, 1\,,\, n \,]\!]$, $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$.
— $\forall j \in [\![\, 1\,,\, n \,]\!], L_j(X) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$. La famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n-liste $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour toute n-liste $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'éléments de $\mathbb{C}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![\, 1\,,\, n \,]\!]$, $P(x_i) = y_i$.
— Cet unique polynôme est égal à : $P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$.

Systèmes linéaires, Matrices

Notations. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif (i.e. : il existe A et B telles que $AB \neq BA$), et non intègre (i.e. il existe A et B non nulles telles que $AB = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$).

Produit. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, alors, en notant $C = AB = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\, n]\!] \times [\![1\,,\, p]\!], c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$.

Formule du binôme. $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2 / \underline{AB = BA}, \forall n \in \mathbb{N}, (A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Systèmes linéaires. Soit $(S) : AX = B$ un système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

— (S) est *homogène* si $B = 0$.
— (S) est *compatible* s'il admet au moins une solution.
— (S) est *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions.
— (S) est *impossible* s'il n'admet aucune solution.
— (S) est *de* Cramer s'il admet une unique solution.

Transformations élémentaires. Les transformations élémentaires suivantes transforment un système (resp. une matrice carrée) en un système équivalent (resp. une matrice équivalente) :

— l'ajout d'un multiple d'une ligne à une <u>autre</u> ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$),
— la multiplication d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$),
— l'échange de deux lignes : ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Transposée. ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A en intervertissant les lignes et les colonnes. On note aussi : ${}^tA = A^T$.

Matrices inversibles : définition. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I$.

Matrices inversibles : caractérisations. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réunie :

— $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB = I$ ou $BA = I$.
— il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A menant à une matrice inversible (en particulier : à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls),
— A est la matrice représentative d'un isomorphisme,
— A est un produit de matrices inversibles - et on a alors, si $A = PQ$: $A^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$,
— ${}^tA$ est inversible - et on a alors : $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}$,
— A est une matrice de passage,
— pour toute matrice colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de Cramer.
— le système $AX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution,
— $\det A \neq 0$ (voir le Formulaire **Déterminants**).

Rang d'une matrice. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Le rang de A est le nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice A (matrice obtenue par suite de transformations élémentaires selon la méthode de Gauss).
— Si A représente un endomorphisme f, alors : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.
— $\operatorname{rg} {}^tA = \operatorname{rg} A$.
— Les transformations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de A conservent le rang de A (et, en particulier, son caractère inversible ou non, s'il s'agit d'une matrice carrée).

Espaces vectoriels

$(E, +, .)$ désigne un $\mathbb{K}$- espace vectoriel. Les éléments u_i sont éléments de E et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$.

Sous-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si $F \subset E$, si $F \neq \varnothing$, et si F est stable par loi $+$ et par la loi $.$, i.e. si : $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda u + \mu v) \in E$. En particulier, sont des sous-espaces vectoriels de E : tout espace s'écrivant sous forme $Vect(u_1, ..., u_n)$, $\mathrm{Ker} f$ (si f est une application linéaire définie sur E) ou encore Imf (si f est une application linéaire à valeurs dans E).

Combinaison linéaire. On dit que u est combinaison linéaire de $u_1, u_2, ..., u_n$ s'il existe une n-liste $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, ..., u_n$ est noté $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$ et est un sous-espace vectoriel de E.

Famille libre. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E si : $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1\,,\, n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Famille liée. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille liée de E si ce n'est pas une famille libre de E, i.e. si au moins un des éléments de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Famille génératrice. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est génératrice de E si : $\forall u \in E$, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Base. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, i.e. si :
$\forall u \in E$, $\exists ! (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Liens en dimension finie. Si E est de dimension finie n :

— Toute famille libre de E admet au maximum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est maximale). Toute famille libre et maximale de E est une base de E.
— Toute famille génératrice de E admet au minimum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est minimale). Toute famille génératrice et minimale de E est une base de E.

Théorème de la base incomplète. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E, alors on peut la compléter en une base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E.

Sommes, sommes directes. La somme de deux s.e.v. F et G de E est donnée par : $F + G = \{x + y,\ x \in F,\ y \in G\}$. La somme $F + G$ est directe si tout élément de $F + G$ se décompose ainsi sous forme $x + y$ de façon *unique.* F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. On note alors : $F + G = F \oplus G$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires. F et G sont supplémentaires dans E (et l'on note $F \oplus G = E$) si l'une de ces conditions équivalentes est remplie :

— $\forall x \in E, \exists ! (y, z) \in F \times G,\ x = y + z$,
— $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$,
— F et G sont respectivement le noyau et l'image d'un projecteur p de E,
— $F = \mathrm{Ker}(s - id)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + id)$, où s est une symétrie de E,
— $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$,
— la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E,

les deux dernières caractérisations n'étant applicables **qu'en dimension finie**.

APPLICATIONS LINÉAIRES

E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

Définition. f est linéaire si : $\forall(u,v) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Noyau. $\mathrm{Ker} f = \{u \in E, f(u) = 0\}$. $\mathrm{Ker} f$ est un s.e.v. de E. $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective.

Image. $\mathrm{Im}\ f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$. $\mathrm{Im}\ f$ est un s.e.v. de F, et : $\mathrm{Im}\ f = F \Leftrightarrow f$ est surjective. Si E est de dimension finie et a pour famille génératrice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$. *Remarque :* la famille $(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$ n'est pas nécessairement libre.

Formule du rang. Si E est de dimension finie : $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim E$.

Propriété. Si E et F sont de *même dimension finie* : f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Droites, plans, hyperplans.

— Un s.e.v. de E est une droite s'il est de dimension 1, un plan s'il est de dimension 2, un hyperplan s'il est le supplémentaire d'une droite dans E. Si E est de dimension finie, un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
— Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en forme une base.
— Les noyaux des formes linéaires non nulles sur E sont les hyperplans de E.

Endo-, iso-, automorphismes.

— f est un endomorphisme de E si f est linéaire de E dans E.
— f est un isomorphisme de E si f est linéaire et bijective de E dans F.
— f est un automorphisme de E si f est linéaire bijective de E dans E.
— f est une forme linéaire sur E si f est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Caractérisation des isomorphismes. f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est remplie :

— $\forall v \in F, \exists! u \in E, f(u) = v$.
— Il existe g, linéaire de F dans E, telle que $f\,o\,g = id_F$ et $g\,o\,f = id_E$.
— f est injective ($\mathrm{Ker} f = \{0\}$) et f est surjective ($\mathrm{Im}\ f = F$).

Si E et F sont de même dimension finie, f est un isomorphisme si, et seulement si :

— f est injective ou surjective, les deux propositions étant alors équivalentes.
— f transforme une base de E en une base de F.
— f transforme toute base de E en une base de F.
— la matrice représentative de f dans une base quelconque de E est inversible.

Projecteurs. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E. Tout élément de E s'écrit sous forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. La projection p sur E_1 parallèlement à E_2 associe à tout $x \in E$ sa composante $x_1 \in E_1$. On a :

— $\mathrm{Ker}\, p = E_2$, $\mathrm{Im}\ p = E_1$ et ainsi : $\mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\ p = E$.
— $\mathrm{Ker}(p - id) = E_1$ et $\mathrm{Im}\,(p - id) = E_2$, et ainsi : $\mathrm{Ker}(p - id) \oplus \mathrm{Im}\,(p - id) = E$.
— p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$.

Symétries. En conservant les notations précédentes, la symétrie s d'axe E_2 associe à tout $x \in E$ écrit sous forme $x = x_1 + x_2$, l'élément $x_1 - x_2$. On a :

— $\mathrm{Ker}(s - id) = E_1$, $\mathrm{Ker}(s + id) = E_2$ et ainsi : $\mathrm{Ker}(s - id) \oplus \mathrm{Ker}(s + id) = E$.
— $\mathrm{Im}\,(s - id) = E_2$ et $\mathrm{Im}\,(s + id) = E_1$, et ainsi : $\mathrm{Im}\,(s - id) \oplus \mathrm{Im}\,(s + id) = E$.
— s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et vérifie $s \circ s = id$.

Déterminants

Déterminant d'une matrice carrée. Le déterminant, noté det, est l'unique application f définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ telle que :

— f est *linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable*, i.e : pour toute matrice $M = (C_1, \ldots C_n)$, où les C_i sont les colonnes de M l'application qui à $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe $f(C_1, ..., C_p, X, C_{p+1}, \ldots, C_n)$ est linéaire.
— f est *antisymétrique par rapport à chacune des colonnes de sa variable*, i.e : pour toute matrice $M = (C_1, \ldots C_n)$, l'image par f d'une matrice obtenue en permutant deux colonnes de M est égal à $-f(M)$.
— $f(I_n) = 1$.

Propriétés. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

— $\det AB = \det BA = (\det A)(\det B)$.
— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
— $\det {}^tA = \det A$.
— A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, et on a alors : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs telle que pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, u_i soit représenté par C_i dans la base $\mathscr{B}$. On appelle déterminant de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$, le déterminant de la matrice $A = (C_1, \ldots, C_n)$.

Invariance par changement de base.

— Le déterminant ne dépend pas de la base choisie.
— Si A et B sont semblables, alors : $\det A = \det B$.

Déterminant d'un endomorphisme. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $\det f = \det A$, où A représente f dans n'importe quelle base de E. Si f et g sont deux endomorphismes de E, on a alors :

— $\det(fog) = \det(gof) = (\det f)(\det g)$.
— $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.
— f est un isomorphisme $\Leftrightarrow \det f \neq 0$, et on a alors : $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

$\mathbb{K}$ désigne un corps infini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de u dans une certaine base.

Valeurs propres.

— $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de u s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. x est alors un *vecteur* propre de u associé à λ.
— Le *spectre* de u est l'ensemble de ses valeurs propres.
— Il y a au plus n valeurs propres distinctes en dimension n.
— u et A ont même spectre.
— Si $\mathbb{L}$ est un corps contenant $\mathbb{K}$, alors le spectre de A sur $\mathbb{L}$ contient le spectre de A sur $\mathbb{K}$.
— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le spectre de u est non vide.
— A et ${}^tA$ ont même spectre, mais pas les mêmes sous-espaces propres.

Sous-espaces propres.

— Le *sous-espace propre* de u associé à λ est $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
— Une droite $\operatorname{vect}(x)$ $(x \neq 0)$ est stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u.
— Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres *distinctes* sont en somme directe.
— Si f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Polynômes d'endomorphismes.

— Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$, avec $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.
— $\Phi_u : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$; $P \longmapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre : on a $(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, mais attention $P(u + \lambda v) \neq P(u) + \lambda P(v)$ et $P(u \circ v) \neq P(u) \circ P(v)$.
— L'idéal des *polynômes annulateurs* de u est $\operatorname{Ker} \Phi_u$, il est engendré par le *polynôme minimal* de u π_u. On a : $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \pi_u \mid P$.
— $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \Phi_u$ est une algèbre commutative : pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Polynôme minimal.

— Le polynôme minimal de u est l'unique polynôme unitaire π_u tel que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P$.
— Les racines de π_u sont exactement les valeurs propres de u.
— Si π_u est de degré d, alors $\left(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
— **Lemme de décomposition des noyaux** : si $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ et que les P_i sont premiers entre eux, alors : $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(u)$.

Polynôme caractéristique.

— Le *polynôme caractéristique* π_A de A est $\chi_A = \det(X\mathrm{Id} - A) = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. On pose $\chi_u = \chi_A$: le polynôme caractéristique est indépendant de la base.
— Les racines de χ_u sont exactement les valeurs propres de u.
— Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
— Pour toute valeur propre λ de u, $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \leqslant \alpha_\lambda$ la multiplicité de λ dans χ_u.
— **Théorème de Cayley-Hamilton** : $\pi_u \mid \chi_u$, i.e. $\chi_u(u) = 0$.

Diagonalisation.

— u (et A) *diagonalisable* $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \iff$ il existe une base de vecteurs propres de u $\iff$ A est semblable à une matrice diagonale.
— u diagonalisable $\iff$ π_u scindé à racines simples $\iff$ χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) = \alpha_\lambda$.

Trigonalisation.

— u (et A) *trigonalisable* $\iff$ A est semblable à une matrice triangulaire.

— u trigonalisable $\iff$ π_u scindé $\iff$ χ_u est scindé. En particulier, u est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Similitude.

— Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible P, dite *de changement de base*, telle que $B = PAP^{-1}$. A et B sont alors les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.
— La similitude est une relation d'équivalence.
— Le spectre, le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, la trace et le déterminant sont des invariants de similitude. Ce n'est pas le cas des sous-espaces propres.

Nilpotence.

— u *nilpotent* $\iff$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ $\iff$ il existe $k \in [\![0 \, , \, n]\!]$ tel que $u^k = 0$.
— u nilpotent $\iff$ u trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$.
— u est nilpotent si et seulement si sa matrice représentative (dans une base quelconque de E) est semblable à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire. $\langle . \mid . \rangle$ (que l'on peut aussi noter $(. \mid .)$) est un produit scalaire sur E si $\langle . \mid . \rangle$ est une application de E^2 qui est :

- *symétrique* : $\forall (u,v) \in E^2, \langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle$,
- *bilinéaire* : $\forall (u,u',v) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle u + \lambda u' \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle + \langle u' \mid v \rangle$,
- *définie-positive* : $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle \geqslant 0$ et : $(\langle u \mid u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0)$.

On appelle alors norme de u associée à ce produit scalaire la quantité : $\|u\| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$.

$(E, \langle . \mid . \rangle)$ est alors appelé espace préhilbertien. Il est dit euclidien si E est de dimension finie.

Produits scalaires usuels.

- Si, pour tous $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, alors Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si, pour tous $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\Phi(X,Y) = {}^tX\,Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, alors Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et si $\Phi(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, alors Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ appelé produit scalaire canonique de $\mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.

- $\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2$, $|\langle u \mid v \rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$.
- $\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2$, $(|\langle u \mid v \rangle| = \|u\|\|v\|) \iff (u$ et v colinéaires$)$.

Orthogonalité.

- u et v sont orthogonaux si : $\langle u \mid v \rangle = 0$. On note : $u \perp v$.
- Deux sous-espaces vectoriels de E notés F et G sont orthogonaux si : $\forall (u,v) \in F \times G$, $\langle u \mid v \rangle = 0$.
- L'orthogonal de F dans E est $F^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in F,\ u \perp v\}$.
- F et $F^\perp$ sont en somme directe. Ils sont même supplémentaires dans E si E est de dimension finie.

Projecteur orthogonal.

- p est un projecteur orthogonal si $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im}\ p)^\perp$. p projette sur $\operatorname{Im}\ p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
- Si $x \in E$ alors y est le projeté orthogonal de x sur l'espace vectoriel F si : $y \in F$ et : $(x - y) \in F^\perp$.
- *Caractérisation métrique du projeté orthogonal :* le projeté orthogonal minimise la distance : $y \in F$ et : $\forall z \in F\ \|x - y\| \leqslant \|x - z\|$.

Bases orthogonales et orthonormales.

- Une base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E est orthogonale si tous les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.
- Une base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E est orthonormale si elle est orthogonale et que ses vecteurs sont tous unitaires (i.e. de norme égale à 1).
- Si $u \in E$ et si $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ forme une base orthonormale de E, alors : $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u \mid u_i \rangle u_i$.

Espaces préhilbertiens réels : approfondissement

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien **réel**.

Supplémentaires orthogonaux.

— Soit F une partie de E. On définit l'**orthogonal** de F par : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.
— Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $F \oplus F^\perp = E$, alors $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F.
— Si F est un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**, alors il admet un supplémentaire orthogonal.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

— Soient F un sev de E de dimension finie et $F^\perp$ son supplémentaire orthogonal. Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_F + x_{F^\perp} \in F \oplus F^\perp$ et l'endomorphisme défini par $p_F : E \to E$ tel que $p_F(x_F + x_{F^\perp}) = x_F$ est appelé **projection orthogonale sur** F.
— **Caractérisation métrique.** Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est l'unique vecteur $f \in F$ vérifiant : $\|x - f\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$. On a alors (théorème de Pythagore) : $\|x\|^2 = \|f\|^2 + \|x - f\|^2$.
— Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base orthonormale de F, $\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k$.
— **Inégalité de Bessel.** Soit $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille orthonormale d'éléments de E. On a : $\forall x \in E, \sum_{k=0}^{n} (x|f_k)^2 \leqslant \|x\|^2$.

Suites totales.

— Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E est **totale** lorsque le s.e.v. $\text{Vect}(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E.
— $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite totale si et seulement si : $\text{Vect}(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})^\perp = \{0_E\}$.
— **Caractérisation des suites totales.** Une suite $(a_n)_n$ d'éléments de E est totale si et seulement si pour tout $x \in E$, la suite des projetés orthogonaux de x sur $\text{Vect}(a_0, a_1, ..., a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ converge vers x.
— **Caractérisation des suites orthonormales totales.** Une suite orthonormale $(e_n)_n$ d'éléments de E est totale si et seulement si pour tout $x \in E$, la série $\sum (x|e_n)^2$ converge de somme $\|x\|^2$.

Endomorphisme symétrique.

— Un endomorphisme u de E est dit **symétrique** lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$.
— L'ensemble des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Si $\dim(E) = n$, alors $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
— **Caractérisation matricielle.** Un endomorphisme est symétrique si, et seulement si, sa matrice exprimée dans une base orthonormale est symétrique (elle est sa propre transposée).
— Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)^\perp$.
— Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sev stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

Projecteur symétrique.

— Un projecteur p est un endomorphisme de E qui vérifie $p^2 = p$.
— Un projecteur p est symétrique si et seulement si c'est une projection orthogonale : il existe un sous-espace F de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ et p projette sur F parallèlement à $F^\perp$.

Théorème spectral. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

— Les valeurs propres de u sont réelles.
— E est en somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u.
— De même, il existe une base orthonormale diagonalisant u.
— Matriciellement : si A est une matrice **symétrique réelle** est diagonalisable, et il existe une matrice o*orthogonale* P et une matrice diagonale réelle D telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

Suites réelles

Suites arithmétiques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)r$,
- $\forall n \geqslant p,\ \sum\limits_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\dfrac{u_p+u_n}{2}$.

Suites géométriques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = q^{n-p}u_p$,
- Si $q \neq 1$: $\forall n \geqslant p,\ \sum\limits_{k=p}^{n} u_k = u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \dfrac{u_p-u_{n+1}}{1-q}$.

Définition de la convergence. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Théorèmes de convergence les plus importants.

- **Théorème de la limite monotone.** Toute suite croissante admet une limite finie ou égale à $+\infty$. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. Résultats analogues pour les suites décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement (dit : "des gendarmes").** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et $\ell^{'}$, alors : $\ell \leqslant \ell^{'}$.

Comparaison de suites.

- **Suites négligeables.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = \varepsilon_n v_n$, où : $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- **Suites équivalentes.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$, i.e. s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = h_n v_n$, où : $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Equivalents usuels. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors :

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$,
- $\sin u_n \sim u_n$,
- $\cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors :

- Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante dans le cas contraire.
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires.
- Si f change de variations, on peut parfois se ramener à un intervalle I stable par f contenant tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, sur lequel f soit monotone.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est **continue** en ℓ, alors : $\ell = f(\ell)$.

Sommes de Riemann. Si f est continue sur $[a,b]$, alors :

- $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Fonctions usuelles

Remarque
Les propriétés les plus élémentaires des fonctions valeur absolue, exponentielle et logarithmes, issues du cours de Terminale, ne sont pas reprises ici.

Partie entière.

— $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que : $x-1 < E(x) \leqslant x$. On note aussi : $E(x) = Ent(x) = \lfloor x \rfloor = [x]$. Pour tout réel x : $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.
— La fonction partie entière est continue en tout point de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ et continue à droite en tout point de $\mathbb{Z}$.

Valeur absolue.

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = max(x,0) + max(-x,0)$.
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

Exponentielle, logarithmes, puissances.

— Lorsque h est au voisinage de 0 : $e^h = 1 + h + \circ(h)$.
— Lorsque h est au voisinage de 0 : $\ln(1+h) = h + \circ(h)$.
— $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, x^y = e^{y \ln x}$.

Fonctions $\cos$, $\sin$, $\tan$. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions Arccos, Arcsin, Arctan.

— La fonction $\cos$ induit une bijection croissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction Arccos définie par : pour tout $y \in [-1,1], \operatorname{Arccos} y$ est l'unique $x \in [0,\pi]$ tel que : $\cos x = y$.

— La fonction $\sin$ induit une bijection croissante de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. La réciproque de cette restriction est la fonction Arcsin définie par : pour tout $y \in [-1,1], \operatorname{Arcsin} y$ est l'unique $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin x = y$.

— La fonction $\tan$ induit une bijection croissante de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ La réciproque de cette restriction est la fonction Arctan définie par : pour tout $y \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan} y$ est l'unique $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan x = y$.

— $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Fonctions ch, sh, th. Voir le formulaire de trigonométrie.

Fonctions Argch, Argsh, Argth.

— La fonction ch induit une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$. La réciproque de cette restriction est la fonction Argch : $\forall y \in [1,+\infty[, \operatorname{Argch} y \ = x \in \mathbb{R}_+ / \operatorname{ch} x = y$.

— La fonction sh est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La réciproque de cette restriction est la fonction Argsh : $\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{Argsh} y = x \in \mathbb{R} / \operatorname{sh} x = y$.

— La fonction th induit une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ La réciproque de cette restriction est la fonction Argth : $\forall y \in]-1,1[, \operatorname{Argth} y = x \in \mathbb{R} / \operatorname{th} x = y$.

— $\forall x \in]1,+\infty[$, $\operatorname{Argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in]-1,1[$, $\operatorname{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Fonctions : limites et continuité

Limite finie en un point. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Limite infinie en un point. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$.

Limite finie en $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Limite infinie en $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$.

Définitions analogues pour des limites en un point à gauche, à droite, ou en en $-\infty$, ou des limites égales à $-\infty$.

Caractérisation séquentielle. $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Croissance.

— f est croissante sur I si : $\forall (x,y) \in I^2,\ (x \leqslant y) \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.

— f est strictement croissante sur I si : $\forall (x,y) \in I^2,\ (x < y) \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Définitions analogues pour une fonction décroissante (resp. strictement décroissante).

Théorème les plus importants sur les limites.

— **Théorèmes de la limite monotone.** Toute fonction croissante sur $]a,b[$ admet en a une limite à droite, finie ou égale à $-\infty$; en b une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$; et en tout point $x_0 \in]a,b[$, une limite finie à droite et une limite à gauche. Résultats analogues pour les fonctions décroissantes.

— **Théorème de l'encadrement (dit "des gendarmes").** Si au voisinage de x_0 : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, et si les fonctions f et g admettent une limite finie commune ℓ en x_0, alors la fonction g admet pour limite ℓ en x_0.

— **Théorème de prolongement des inégalités.** Si pour tout x est au voisinage de x_0 : $f(x) \leqslant g(x)$, et si les fonctions f et g admettent en x_0 des limites finies, respectivement égales à ℓ et ℓ', alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Comparaison de fonctions.

— **Fonctions négligeables.** f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et l'on note $f(x) = o(g(x))$, s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, de limite nulle, tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$.

— **Fonctions équivalentes.** f est équivalente à g lorsque au voisinage de x_0, et l'on note $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$, si $f(x) - g(x) = o(g(x))$, i.e. s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $f(x) = h(x)g(x)$, où $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$.

Equivalents usuels.

— $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

— $\ln u \underset{1}{\sim} u - 1$.

— $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

— $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$.

— $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

— $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$.

Continuité. f est continue en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Les opérations élémentaires conservent la continuité. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes sur se ce segment.

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour toute valeur intermédiaire λ strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c \in]a,b[, f(c) = \lambda$. Si f est strictement monotone, cette solution est unique (théorème dit "de la bijection"). La fonction réciproque f^{-1} est alors continue et de même monotonie que f.

Fonctions lipschitziennes. f est k-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}_+^*$) sur I si $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Toute fonction lipschitzienne est continue.

Fonctions : dérivabilité, convexité

Définition. f est dérivable en x_0 si son taux d'accroissement admet au point x_0 une limite finie, i.e. si : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \mathbb{R}$, soit avec $h = x - x_0$, si et seulement si : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell$. Toute fonction dérivable en un point y est continue. La réciproque est fausse. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Définitions analogues pour la dérivabilité à gauche, à droite.

Opérations. Les opérations les plus élémentaires, issues du cours de Terminale, ne sont pas reprises ici.

— $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ (si $n \geqslant 1$).
— $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$.
— $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$ (sous réserve que le dénominateur ne s'annule pas).

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I, et :
$\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Les opérations élémentaires conservent la classe.

Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$, continue en a, et si f' admet en a une limite finie à droite notée ℓ, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et : $f'(a)=\ell$.

Théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b]$, continue en a, et si $f^{(n)}$ admet en a une limite finie à droite notée ℓ, alors $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, et : $f^{(n)}(a)=\ell$.

Théorèmes importants. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

— **Théorème de Rolle.** Si $f(a)=f(b)$, alors : $\exists c \in]a,b[, f'(c)=0$.
— **Théorème des accroissements finis.** Plus généralement : $\exists c\in]a,b[, f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.
— **Inégalité des accroissements finis.** Si : $\forall t \in]a,b[, m \leqslant f'(t) \leqslant M$, alors : $m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$.
— **Inégalité des accroissements finis (V2).** Si : $\forall t\in]a,b[, |f'(t)|\leqslant M$, alors : $|f(b)-f(a)|\leqslant M(b-a)$.

Fonctions convexes. f est convexe sur I si : $\forall (x,y)\in I^2, \forall \lambda\in[0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.
Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si f'' est positive. Si f est dérivable sur I, f est convexe si et seulement si f' est croissante. La courbe représentative de f est alors située au dessus de ses tangentes et en dessous de ses cordes.
Définitions et propriétés analogues si f est concave. f est concave si $-f$ est convexe.

Inégalité de Jensen. Si f est convexe sur I, l'image d'un barycentre est inférieure ou égale au barycentre des images : $\forall (x_1,x_2,\dots,x_n)\in I^n, \forall(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n \,/\, \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1,\ f\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leqslant \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$.

Représentation graphique. En notant $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

— **Tangente.** Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en a, la droite d'équation $x=a$ est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a. Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ est tangente à $\mathscr{C}$ en a.
— **Point d'inflexion.** $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion en a si f'' s'annule en changeant de signe en a.
— **Symétrie axiale.** Si $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $2a-x\in\mathcal{D}_f$ et : $\forall x\in\mathcal{D}_f, f(2a-x)=f(x)$, alors la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.
— **Symétrie centrale.** Si $\forall x\in\mathcal{D}_f$, $2a-x\in\mathcal{D}_f$ et : $\forall x\in\mathcal{D}_f, f(2a-x)=2b-f(x)$, alors le point (a,b) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

Intégration sur un segment

Définition théorique. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est définie comme la valeur commune de (1) : la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f, et (2) : la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f.

Primitive et Intégrale. Toute fonction continue sur $[a,b]$ y admet une primitive, notée F. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Toute fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, où $a \in \mathbb{R}$, est une primitive de f s'annulant en a. Si f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriétés de l'intégration. f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$.

- **Chasles.** $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Positivité.** <u>Si $a \leqslant b$:</u> si f est positive, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- **Croissance.** <u>Si $a \leqslant b$:</u> si $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Intégrale nulle.** Si f est <u>continue</u> et positive sur $[a,b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0$.

Intégration par parties. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable. On a les deux théorèmes équivalents suivants :

- "$u = \varphi(t)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.
- "$t = \varphi(u)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Sommes de Riemann. Si f est continue sur $[a,b]$, alors :

- $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\frac{1}{n} \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Valeur moyenne. $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$. $\exists c \in]a,b[, \mu = f(c)$ (conséquence du théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de f).

Remarque

$\int_2^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}$. Privilégiez l'intégrale de 1 à 2 avec les cours et stages d'Optimal Sup Spé.

Intégration sur un intervalle quelconque

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fonctions intégrales à valeurs positives et continues par morceaux.

Une fonction $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ est dite intégrable sur I s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$. On note alors $\displaystyle\int_I f = \sup_{J \subset I} \int_J f$.

Critères d'intégrabilité.

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$.
— Si : $\forall t \in I$, $f(t) \leqslant g(t)$, et si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.
Dans les trois résultats suivants, on supposera $I = [\,a\,,b\,[$ où $(a,b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ avec $a < b$.
— Si : $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si, et seulement si, g est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.
— Si : $f(t) \underset{b}{=} o(g(t))$, et si g est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, alors f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.
— f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b, et on a alors : $\displaystyle\int_I f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Intégrales de Riemann.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\,a\,,+\infty\,[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]\,0\,,a\,]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Intégrabilité pour des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

— Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$. f est dite intégrable sur I si $|f|$ est intégrable sur I.
— Cette définition étend celle de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Les propriétés usuelles de linéarité, positivité et la relation de Chasles s'étendent à cette nouvelle définition de l'intégrale.

Continuité d'une intégrale à paramètre.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, A une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$, $f : A \times I \to \mathbb{K}$, telle que :
— $\forall t \in I$, $f(\cdot,t)\colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$;
— $\forall x \in A$, $f(x,\cdot)\colon I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$;
— **hypothèse de domination sur** A : $\exists \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que : φ est intégrable sur I et : $\forall x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$.
Alors $g\colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$.

Dérivation d'une intégrale à paramètre.

Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $f : A \times I \to \mathbb{K}$, telle que :
— $\forall x \in A$, $f(x,\cdot)\colon I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$;
— f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable $\dfrac{\partial f}{\partial x}$;
— $\forall t \in I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$;
— $\forall x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$;
— **hypothèse de domination sur** A : $\exists \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que : φ est intégrable sur I et : $\forall x \in A$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right| \leqslant \varphi$.
Alors $g\colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$ et $\forall x \in A$, $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Les deux derniers théorèmes restent vrais si l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte de A.

Développements limités

Formule de Taylor avec reste intégral. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

Formule de Taylor-Young. Si $f \in \mathcal{C}^{n}([a,b],\mathbb{R})$, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Développements limités usuels. Lorsque x est au voisinage de 0 :

— $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$.
— $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})$.
— $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
— $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
— $\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
— $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
— $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.
— $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$.
— $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Développements limités et continuité, dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est définie en a :

— f admet un d.l.(0) au voisinage de a si et seulement si f est continue en a.
— f admet un d.l.(1) au voisinage de a si et seulement si f est dérivable en a.
— Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, alors f admet un d.l.(n) au voisinage de a. La réciproque est fausse.

Développements limités et dérivée, primitive. Si f est définie en a et $n \geqslant 1$:

— Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors f' admet un d.l.$(n-1)$ au voisinage de a obtenu en dérivant terme à terme le d.l(n) de f en a.
— Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors toute primitive F de f admet un d.l.$(n+1)$ au voisinage de a obtenu en intégrant (à une constante près) le d.l.(n) de f en a.

Fonctions de plusieurs variables

n et p désignent deux entiers naturels non nuls, $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, |\cdot|)$ désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions n et p, $(G, |||\cdot|||)$ désigne un espace vectoriel normé, Ω désigne un ouvert de E, f désigne une fonction de Ω dans F, a désigne un élément de Ω.

Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles.

— Soit $h \in \Omega$, $h \neq 0_E$. f admet en a une dérivée suivant le vecteur h si $\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ admet une limite quand t tend vers 0, notée alors $\mathrm{D}_h f(a)$.
— Dans le cas particulier où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E fixée, on note, pour $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée suivant le vecteur e_i de f en a, appelée dérivée partielle de f par rapport à x_i.
— La dérivation partielle est linéaire et plus généralement, les règles de calcul usuelles sur les dérivées s'appliquent.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si f admet une dérivée partielle par rapport à x_i, pour $i \in [\![1\,,\,n]\!]$, et si ces dérivées partielles sont continues sur Ω.
— f est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, pour tout $h \in E\backslash\{0_E\}$, f admet une dérivée suivant le vecteur h sur Ω, et si ces dérivées sont continues sur Ω.

Fonction différentiable, différentielle.

— f est différentiable en $a \in \Omega$ s'l existe $\mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}(E, F)$, appelée différentielle de f en a, telle que : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(h)$.
— Si f est différentiable en a, alors elle admet une dérivée en a suivant tout vecteur h, et alors $\mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{D}_h f(a)$.
— $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{F}) \Rightarrow f$ différentiable sur Ω.
— Si V un ouvert de F, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, V)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ alors : $\mathrm{d}(f \circ g)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$.

Matrice jacobienne, jacobien.

— Soit $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de F, $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la famille des fonctions composantes de $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ sur cette base. La matrice jacobienne de f en a est la matrice : $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
— Le jacobien de f en a est le déterminant de $J_f(a)$.
— Si V un ouvert de F, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, V)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ alors : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwartz.

— f admet une dérivée d'ordre 2 en a suivant les vecteurs e_i et e_j si f admet une dérivée partielle par rapport à x_j sur un ouvert contenant a et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle en a par rapport à x_i, notée alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
— f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]$, f admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_i et x_j et si ces dérivées partielles sont continues. On a alors : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i} \partial x_j = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i} \partial x_j$.

Gradient.

Si : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et : $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, alors : $\forall a \in \Omega$, $\exists ! \mathrm{grad}(f)(a) \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}_f(a)(h) = \langle \mathrm{grad}(f)(a) \mid h \rangle$.

Inégalité des accroissements finis.

Si Ω est convexe, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $(a,b) \in \Omega^2, M \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall a \in \Omega$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \leqslant M$, alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant M \|b-a\|_\infty$.

Point critique, extremum local, point selle.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
— a est un point critique de f si : $\mathrm{d}f_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ ou, de façon équivalente, si : $\mathrm{grad}(f)(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
— Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.
— Si a est un point critique de f qui n'est pas un extremum local de f, on dit que a est un point selle.

Equations différentielles

Méthodes importantes

D'une solution particulière à la solution complète. Si (L) est une équation linéaire, d'équation homogène associée (H), et si f_0 est une solution particulière de (L), alors (f est solution de (L)) $\Leftrightarrow$ ($f - f_0$ est solution de (H)).

Méthode de variation de la constante. On conserve les notations précédentes. But : trouver une solution particulière de (L). On trouve la solution générale de (H). On considère une solution particulière de (H), notée g_0, qui ne s'annule pas. Puis on cherche à quelle condition la fonction $f_0 : t \to \lambda(t)g_0(t)$ est solution de (L).

Principe de superposition des solutions. But : trouver une solution particulière de (L). Si le second membre d'une équation (L) est une somme de fonctions, on cherche des solutions particulières pour chacune des équations induites. La superposition (i.e. la somme) de toutes les solutions particulières est une solution particulière de (L).

Résolution des équations au programme sur un intervalle I

Equation $y' + ay = 0$. $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$, où A est une primitive de la fonction a, et où λ décrit $\mathbb{R}$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p$, où p est un polynôme. Deux cas se présentent :

- Si $a \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n.
- Si $a = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.

Solution particulière de l'équation $y' + ay = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. Deux cas se présentent :

- Si $a \neq m,\ \deg q = n$.
- Si $a = m,\ \deg q = n + 1$.

Equation $ay''+by'+cy = 0$, cas où a, b, c sont réels. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0 ; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Trois cas se présentent :

- Si $\Delta > 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où a, b, c sont complexes. On considère le discriminant Δ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions complexes conjuguées notées x_1 et x_2 ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée x_0. Deux cas se présentent :

- Si $\Delta \neq 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0 : ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où (λ, μ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p$, où p est un polynôme. Trois cas se présentent :

- Si $c \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré n.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.
- Si $b = c = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 2$.

Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p(t)e^{mt}$, où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. En notant (E) l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, trois cas se présentent :

- Si m n'est pas racine de (E), $\deg q = n$.
- Si m est racine simple de (E), $\deg q = n + 1$.
- Si m est racine double de (E), $\deg q = n + 2$.

Équations différentielles : approfondissement

E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, a une application continue de I dans $\mathcal{L}(E)$, b une application continue de I dans E et y une application dérivable de I dans E. On note alors ay l'application allant de I dans E qui vérifie : $\forall t \in I, ay(t) = a(t)(y(t))$.

Équation différentielle linéaire d'ordre 1.

- On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** toute équation de la forme $y' = ay + b$.
- Une **solution** de l'équation précédente est une application y dérivable allant de I dans E vérifiant : $\forall t \in I, y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)$.
- En choisissant une base de E, l'équation différentielle précédente se réécrit matriciellement telle que : $\forall t \in I, Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, où Y et B sont des matrices colonnes représentant les vecteurs y et b et où A est la matrice carrée de l'application a dans la base choisie.
- On appelle **équation homogène** associée à l'équation $y' = ay + b$ l'équation $y' = ay$.
- La dimension de l'espace des solutions de l'équation $y' = ay$ vaut $n = \dim(E)$.
- Les solutions de l'équation différentielle totale s'écrivent sous la forme $y = y_h + y_p$, où y_h est une solution de l'équation homogène associée et y_p est une solution particulière de l'équation *totale*.
- Si $E = \mathbb{K}$, alors il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I, y_h(t) = Ce^{\alpha(t)}$, où α est une primitive de la fonction a sur I.

Problème de Cauchy.

- Un **problème de Cauchy** sur I est la donnée d'une équation différentielle $y' = ay + b$ couplée à une **condition initiale** $x(t_0) = x_0 \in E$, où $t_0 \in I$.
- **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire** : pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution sur I de l'équation $y' = ay + b$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Système fondamental de solutions. Wronskien.

- On appelle **système fondamental de solutions** toute base de l'espace des solutions de l'équation homogène $y' = ay$. Cette base contient n éléments.
- Pour toute famille $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de solutions de l'équation homogène, on appelle **wronskien** relativement à une base $\mathcal{B}$ l'application $\mathcal{W}$ de I dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall t \in I, \mathcal{W}(t) = \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$.
- Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
  - La famille $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est un système fondamental de solutions.
  - $\forall t \in I, \mathcal{W}(t) \neq 0$.
  - $\exists t_0 \in I, \mathcal{W}(t_0) \neq 0$.

Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice.

On se donne un endomrophisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice exprimée dans une base $\mathcal{B}$ de E.

- L'**exponentielle de l'endomorphisme** u est définie par l'endomorphisme $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$, où u^k est l'endomorphisme u composé k fois.
- L'**exponentielle de la matrice carrée** A est définie par la matrice $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.
- Si $v \in \mathcal{L}(E)$ *commutant avec* u, alors $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$.
- L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \exp(tu)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$.
- Lorsque A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, où $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n})$.

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

- L'équation différentielle homogène $y' = ay$ est dite **à coefficients constants** si $a \in \mathcal{L}(E)$ est indépendant de la variable t. En choisissant une base de E, l'équation se réécrit matriciellement : $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t)$.
- Soit un vecteur $u \in E$, la fonction définie par $\forall t \in I, y(t) = \exp(ta)(u)$ est solution de l'équation $y' = ay$.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors la famille de fonctions représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $\exp(tA)$ est un système fondamental de solutions.

Recherche de solutions particulières.

- **Principe de superposition.** Si $b = \sum_{k=0}^{N} b_i$ et que les (y_i) sont solutions des équations $y' = ay + b_i$, alors $y_p = \sum_{k=0}^{N} y_i$ est une solution particulière de l'équation totale $y' = ay + b$.
- **Variation de la constante.** On se donne $(y_1, y_2, ..., y_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = ay$. Il est possible de chercher une solution particulière de l'équation totale $y' = ay + b$ de la forme $y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) y_k(t)$, avec $(c_k)_k$ une famille de fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$. Dans une base $\mathcal{B}$ de E, cela s'écrit matriciellement : $Y_p(t) = F(t)C$ où $F(t)$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $(y_k(t))_k$ et C est la matrice colonne composée des scalaires $(c_k(t))_k$.
  Y_p est solution de $Y' = AY + B$ si, et seulement si, $C'(t) = F^{-1}(t)B(t)$. Cette dernière relation fournit l'expression des $c_k'(t)$ dont il suffit de déterminer une primitive.
- **Cas où a est constante.** Dans le cas où a ne dépend pas de la variable t, $F^{-1}(t) = \exp(tA)^{-1} = \exp(-tA)$.

Cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Considérons l'équation différentielle $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, où a, b, c et d sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. **Attention !** La méthode avec le polynôme caractéristique ne s'applique que si les fonctions a, b et c sont constantes !

- On commence par se placer sur un intervalle I sur lequel la fonction a ne s'annule pas.
- On réécrit l'équation différentielle sous sa forme **résolue** : $y'' = \alpha(t)y' + \beta(t)y + \gamma(t)$, où $\alpha = -b/a$, $\beta = -c/a$ et $\gamma = d/a$.
- On transpose l'écriture sous forme matricielle en introduisant $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix}$ et $B(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, on peut écrire $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$. On se ramène alors à une équation différentielle d'ordre 1 sur l'espace $\mathbb{K}^2$.
- On commence par chercher un système fondamental de solutions $(y_1,\ y_2)$ de l'équation homogène $Y' = A(t)Y$.
  - S'il existe P inversible et indépendante de t et une matrice diagonale D telles que $A(t) = PD(t)P^{-1}$, alors on peut écrire : $(P^{-1}Y)' = D(t)(P^{-1}Y)$ qui se résout plus facilement (équation différentielle scalaire du premier ordre).
  - Dans le cas où $A(t)$ ne dépend pas de t, il suffit de prendre $y_i(t) = \exp(tA)e_i$, où (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{K}^2$.
  - Sinon, on montre que (i) y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ et (ii) que le wronskien $\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ ne s'annule pas en un point.
- On cherche ensuite une solution particulière. Si celle-ci n'est pas évidente, où ne peut pas être déterminée avec les méthodes de sup, on procède à la variation de la constante :
  - On suppose que la solution a la forme $y_p(t) = \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$.
  - On sait alors que : $\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.
  - Il reste à déterminer une primitive de λ' et de μ' pour obtenir une solution particulière.
- On écrit les solutions de l'équation totale sous la forme : $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) + y_p(t)$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- Si la fonction a s'annule en certains points, on suit la méthode précédente sur chacun des intervalles I sur lesquels a ne s'annule pas. Puis on recolle les fonctions obtenues en les points d'annulation. On vérifie enfin que la fonction obtenue est bien dérivable deux fois et qu'elle vérifie l'équation différentielle en les points où a s'annule.

Espaces vectoriels normés

Soient $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme N vérifiant les propriétés ci-dessous.

Norme. L'application N de E dans $\mathbb{R}$ est une norme si elle vérifie :

— la *positivité* : $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$,
— l'*axiome de séparation* : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
— l'*homogénéité* : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
— l'*inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Norme associée à un produit scalaire. La norme N associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$ est définie par :

— $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

Normes usuelles. Les applications suivantes sont les normes usuelles à connaître :

— Dans $\mathbb{K}^n$, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $N_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $N_2(x) = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ et $N_\infty(x) = \displaystyle\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
— Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $N_1(x) = \displaystyle\int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t$. C'est la **norme de convergence en moyenne**.
— Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $N_2(x) = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$. C'est la **norme de convergence en moyenne quadratique**.
— Pour f une fonction bornée à valeurs dans $\mathbb{K}$, $N_\infty(x) = \displaystyle\sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$. C'est la **norme de convergence uniforme**.

Normes équivalentes. Les normes N_1 et N_2 sont dites **équivalentes** si :

— $\exists (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.
— Lorsque E est de **dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.

Distance. L'application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ est une distance si elle est vérifie :

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geqslant 0$,
— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$,
— $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Distance associée à une norme. La distance d associée à la norme N est définie par :

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(y - x)$.

Boules et sphères.

— On appelle **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x - a) \leqslant r\}$.
— On appelle **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathrm{O}}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x - a) < r\}$.
— On appelle **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x - a) = r\}$.

Parties, suites et fonctions bornées.

— On appelle **partie bornée** toute partie de E qui est incluse dans au moins une boule.
— On appelle **application bornée** toute application dont l'image est bornée.
— On appelle **suite bornée** toute suite (u_n) telle que l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Suites convergentes et divergentes. Soit (u_n) une suite d'éléments de E.

— On dit que (u_n) **converge** si : $\exists l \in E : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0, N(u_n - l) \leqslant \varepsilon$.
— On dit que (u_n) **diverge** si (u_n) ne converge pas.
— Si la suite (u_n) est convergente, alors elle est bornée et sa limite est unique.
— On appelle **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) toute limite d'une suite extraite de (u_n).
— Une suite avec au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

Topologie d'un espace vectoriel normé

Soit E un espace vectoriel normé muni de la norme N et A une partie de E.

Voisinage d'un point. Soit $x \in E$.

- On appelle **voisinage** de x toute partie de E qui contient une boule ouverte de centre x.
- On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
- Dire que $V \in \mathcal{V}(x)$ signifie que : $\exists r > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < r \Rightarrow y \in V$.

Ouverts et fermés de E.

- On appelle **ouvert** de E toute partie de E qui est un voisinage de chacun de ses points.
- Ou encore, $\mathcal{O}$ est un ouvert de E si, et seulement si, pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans $\mathcal{O}$.
- Autrement dit, $\mathcal{O}$ est un ouvert de E si, et seulement si : $\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < r \Rightarrow y \in \mathcal{O}$.
- E, $\varnothing$ et toute boule ouverte de E sont des ouverts de E.
- On appelle **fermé** de E toute partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de E.
- E, $\varnothing$, tout singleton $\{x\}$ de E et toute boule fermée de E sont des fermés de E.
- **Caractérisation séquentielle des fermés.** F est un fermé de E si, et seulement si, pour toute suite d'éléments de F convergente, la limite est dans F.

Stabilité des ouverts et des fermés.

- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.

Point adhérent et adhérence.

- Soit $x \in E$, on dit que x est **adhérent** à A si tout voisinage de x rencontre A : $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing$.
- x est adhérent à A si, et seulement si, toute boule fermée centrée en x contient au moins un élément de A : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : N(a-x) \leqslant \varepsilon$.
- On appelle **adhérence** de A l'ensemble des points adhérents à A. On la note $\bar{A}$.
- **Caractérisation de l'adhérence.** $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A. $\bar{A}$ est donc un fermé de E.
- **Caractérisation séquentielle de l'adhérence.** x est adhérent à A si, et seulement si, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
- A est un fermé de E si, et seulement si : $\bar{A} = A$.
- On dit que $B \subset A$ est **dense** dans A quand $\bar{B} = A$.

Point intérieur, intérieur et frontière.

- On dit que x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x.
- Autrement dit, x est un **point intérieur** à A lorsqu'il existe une boule ouverte de centre x contenue dans A : $\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.
- On appelle **intérieur** de A l'ensemble des points intérieurs à A. On le note $\overset{\circ}{A}$.
- **Caractérisation de l'intérieur.** $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A. $\overset{\circ}{A}$ est donc un ouvert de E.
- On appelle **point frontière** de A un point adhérent à A qui n'est pas intérieur à A.
- On appelle **frontière** de A l'ensemble des points frontières de A : $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
- On a les égalités suivantes : $\complement_E \bar{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$ et $\complement_E \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_E A}$.

Topologie induite sur A.

- Soit $a \in A$. On appelle **voisinage de a relatif à** A l'intersection de A avec un voisinage de a.
- On appelle **ouvert** (resp. **fermé**) **relatif à** A l'intersection de A avec un ouvert (resp. un fermé) de E.

Compacité et connexité par arcs

Soit E un espace vectoriel normé muni de la norme N.

Théorème de Bolzano-Weierstrass.

— Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** admet au moins une valeur d'adhérence.
— Autrement dit, toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** admet une sous-suite convergente.

Parties compactes.

— Une partie A de E est dite **compacte** si pour toute suite d'éléments de A on peut en extraire une sous-suite qui converge dans A.
— Toute intersection de parties compactes est compacte.
— Toute réunion **finie** de parties compactes est compacte.
— Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.
— Tout produit **fini** de parties compactes est compact.
— Toute partie compacte est fermée et bornée.

Parties compactes en dimension finie. On suppose que E est de dimension finie.

— **Caractérisation des parties compactes.** En **dimension finie**, une partie A de E est compacte si, et seulement si, A est une partie fermée et bornée de E.

Compacité et applications continues. On se donne E et F deux espaces vectoriels normés.

— Si K est un compact de E et f une application **continue** de E dans F, alors $f(K)$ est un compact de F.
— **Théorème des bornes atteintes.** Si K est un compact de E et f une application **continue** de K dans F, alors f est bornée et atteint ses bornes.
— **Théorème de Heine.** Si f est continue sur un compact K de E, alors f est **uniformément** continue sur K.

Connexité par arcs. On se donne A une partie de E.

— On appelle **chemin** toute application **continue** γ de $[0,1]$ dans A.
— On appelle **arc** l'ensemble $\gamma([0,1])$ des points atteints par un chemin. $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés **extrémités** de ce chemin.
— La relation $\mathcal{R}$ définie sur A par $a\mathcal{R}b$ si, et seulement si, il existe un chemin continu reliant a et b est une relation d'équivalence.
— Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sont appelées les **composantes connexes par arcs** de A.
— A est dite **connexe par arcs** lorsqu'elle n'admet qu'une unique composante connexe par arcs.
— Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

Connexité par arcs et applications continues.

— L'image d'un connexe par arcs par une application continue est encore connexe par arcs.
— **Théorème des valeurs intermédiaires.** Si f est une application continue d'une partie A de E connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
— Autrement dit, si f est une fonction continue sur un connexe par arcs A et qu'elle atteint les réels a et b ($a < b$), alors elle atteint sur A toutes les valeurs de l'intervalle $[a,b]$.

Parties convexes et étoilées.

— Pour $x, y \in E$, on appelle **segment** $[x,y]$ l'ensemble des points $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$.
— Une partie A de E est dite **convexe** si pour tout x, y dans E le segment $[x,y]$ est inclus dans A.
— Une partie A de E est dite **étoilée** s'il existe un élément a de A tel que : $\forall x \in A, [a,x] \subset A$.

Applications dans un espace vectoriel normé

Soient E et F deux espaces vectoriels normés munis respectivement des normes N et N'. On se donne A une partie de E et f une application de A dans F.

Limite d'une application en un point adhérent. Soit $a \in \bar{A}$.

— f **admet pour limite** $l \in F$ **au point** a si pour tout voisinage V de l, il existe un voisinage W de a relatif à A tel que $f(W) \subset V$. Autrement dit : $\forall V \in \mathcal{V}_F(l), \exists W \in \mathcal{V}_E(a) : f(W \cap A) \subset V$.
— Ou encore : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in A, N_1(x-a) \leqslant \eta \Rightarrow N_2(f(x)-l) \leqslant \varepsilon$.
— Lorsqu'une telle limite existe, elle est **unique**.
— Si l est la limite de a par f alors l est adhérent à $f(A)$.
— **Caractérisation séquentielle.** f admet une limite en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ est convergente.
— Dans $\mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient au moins un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ (resp. $]-\infty, c]$).

Opérations sur les limites.

— Soient $F_1, F_2, ..., F_n$ un nombre fini d'espaces vectoriels normés et $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on se donne une application f_i de A dans F_i et on définit f de A dans F par $f(a) = (f_1(a), ..., f_n(a))$. f admet en $a \in A$ la limite $l = (l_1, ...l_n)$ si, et seulement si, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, f_i admet pour limite l_i en a.
— Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications et a un point adhérent à A. Si f admet pour limite b au point a et que g admet pour limite c au point b, alors $g \circ f$ admet pour limite c au point a.
— Soient f et g deux applications de A dans F admettant respectivement l_f et l_g pour limites en a. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ admet une limite en a et cette limite vaut $\lambda l_f + \mu l_g$.
— Soient $f : A \Rightarrow F$ et $u : A \Rightarrow \mathbb{K}$ deux applications admettant respectivement l et λ pour limites en a adhérent à A. Alors, l'application $u \times f$ admet une limite en a et cette limite vaut λl.
— En particulier, les applications **polynômiales** sont continues.

Continuité d'une application. Soit $a \in A$.

— Si f admet $f(a)$ comme limite au point a, alors f est **continue** en a.
— Si f est continue sur tous les points de A, alors f est **continue** sur A.
— **Caractérisation séquentielle.** f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.
— La composée de deux applications continues est encore continue.
— **Théorème.** Si deux fonctions **continues** coïncident sur une partie B dense dans A, alors ces deux applications coïncident sur A.

Caractérisation de la continuité par l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé.
Les trois propositions suivantes sont équivalentes

- f est continue sur A.
- L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif de A.
- L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif de A.

Continuité uniforme.

— On dit que f est **uniformément continue** sur A lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in A^2, N_1(y-x) \leqslant \eta \Rightarrow N_2(f(y)-f(x)) \leqslant \varepsilon$.
— On dit que f est k**-lipschitzienne** lorsqu'il existe $k \geqslant 0$ tel que : $\forall (x,y) \in A^2, N_2(f(y)-f(x)) \leqslant kN_1(y-x)$.
— Si f est k-lipschitzienne, alors elle est uniformément continue.

Applications linéaires continues. On suppose que $f : E \to F$ est linéaire.

— f est continue sur $E \Longleftrightarrow f$ est continue en $0_E \Longleftrightarrow f$ est bornée sur la boule unité $\Longleftrightarrow f$ est lipschitzienne sur $E \Longleftrightarrow f$ est uniformément continue sur $E \Longleftrightarrow \exists C \geqslant 0 : \forall x \in E, N_2(f(x)) \leqslant CN_1(x)$.
— En **dimension finie**, toute application linéaire, bilinéaire ou multilinéaire est continue.
— En particulier, le déterminant est une application continue en dimension finie.

Séries réelles et vectorielles

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

Définitions et notations.

— On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.

— Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, S_n s'appelle **somme partielle** de la série $\sum u_n$.

— On dit que la série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_n$ converge.

— **Quand la série** $\sum u_n$ **converge**, on appelle **somme** de $\sum u_n$ la limite de la suite $(S_n)_n$. On la note $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Attention. Cette notation n'a pas de sens quand la série ne converge pas.

— **Quand la série** $\sum u_n$ **converge**, on appelle **reste d'ordre** n de $\sum u_n$ l'élément $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

Attention. Cette notation n'a pas de sens quand la série ne converge pas.

— Quand une série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Divergence grossière.

— Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_n$ tend vers 0.

— Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ ne converge pas. On dit alors que la série **diverge grossièrement**.

Convergence absolue.

— On dit que la série réelle (resp. d'éléments de E) $\sum u_n$ **converge absolument** quand la série $\sum |u_n|$ (resp. $\sum \|u_n\|$) converge.

— Si une série réelle converge absolument, alors elle est convergente.

— Si une série vectorielle converge absolument et que E est de **dimension finie**, alors elle est convergente.

— La réciproque est **fausse** : il existe des séries convergentes mais qui ne convergent pas absolument. Elles sont dites **semi-convergentes**.

Séries particulières. On suppose que E est de dimension finie.

— Soit $u \in E$, on appelle **série géométrique** la série $\sum u^n$. Quand $\|u\| < 1$, cette série est convergente.

— Soit $u \in E$, on appelle **série exponentielle** la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$. Cette série est absolument convergente. On note sa somme : $\exp(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

Règle de d'Alembert. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels **strictement positifs**.

— Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ et que $l > 1$ (resp. $l < 1$), alors $\sum u_n$ diverge (resp. converge). Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

— Si à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ avec $k \in]0, 1[$, alors $\sum u_n$ converge.

— Si à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Critère spécial des séries alternées.

— Si $\sum u_n$ est alternée $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leqslant 0)$ et que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

Produit de Cauchy. On suppose que E est de dimension finie.

— On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries réelles convergentes à termes positifs (resp. vectorielles absolument convergentes), alors leur produit de Cauchy converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Comparaison série-intégrale. Soit f une fonction réelle positive et décroissante.

— La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ est convergente.

— La série $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)_n$ converge.

Sommation des relations de comparaison.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes à termes réels **positifs** et que R_n et R'_n sont leurs restes d'ordre n respectifs, alors :
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n = o(R'_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n = O(R'_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n \sim R'_n$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries divergentes à termes réels **positifs** et que S_n et S'_n sont leurs sommes partielles d'ordre n respectives, alors :
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(S'_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n = O(S'_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim S'_n$.

FAMILLES SOMMABLES DE NOMBRES COMPLEXES

Dénombrabilité.

— Un ensemble est dit **dénombrable** lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
— Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
— Un ensemble est fini ou dénombrable si, et seulement si, il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
— Un produit cartésien **fini** d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.
— Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.
— **Exemples.** Les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Famille sommable de réels positifs. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

— On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute partie **finie** $J \subset I$, on ait $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j \leqslant M$.
— On définit alors la **somme de la famille** par $\displaystyle\sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{finie}}} \sum_{j\in J} u_j$. On la note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.
— Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.
— **Cas $I = \mathbb{N}$.** La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_i$ converge.

Théorème de sommation par paquets. Soit $(I_n)_n$ une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

— La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et (ii) la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.
— Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Famille sommable réelle ou complexe.

— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes. On dit que cette famille est **sommable** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.
— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. En notant $I_+ = \{i \in I \mid u_i \geqslant 0\}$ et $I_- = \{i \in I \mid u_i < 0\}$, les familles $(u_i)_{i\in I_+}$ et $(u_i)_{i\in I_-}$ sont sommables et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_+} |u_i| - \sum_{i\in I_-} |u_i|$.
— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable. Les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i) + \sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)$.
— **Cas $I = \mathbb{N}$.** La famille de réels ou de complexes $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_i$ converge absolument.

Permutation des termes d'une série absolument convergente.

— Soient $\sum u_n$ une série de termes complexes **absolument** convergente et σ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Théorème de sommation par paquets. Soit $(I_n)_n$ une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille réelle ou complexe.

— La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et (ii) la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ converge.
— Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Interversion de sommes sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de nombres réels positifs.

— La famille de réels positifs $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est **sommable** si, et seulement si, (i) pour tout j, la série $\sum_i u_{i,j}$ est convergente de somme S_j et (ii) la série $\sum_j S_j$ est convergente.

— Dans ce cas, (i) pour tout i, la série $\sum_j u_{i,j}$ est convergente de somme T_i, (ii) la série $\sum_i T_i$ est convergente et (iii) on a l'égalite $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

Intervertion de sommes sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de nombres complexes.

— La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est **sommable** si, et seulement si, pour tout i, la série $\sum_j u_{i,j}$ est absolument convergente et la série $\sum_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty}|u_{i,j}|\right)$ est convergente.

— La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est **sommable** si, et seulement si, pour tout j, la série $\sum_i u_{i,j}$ est absolument convergente et la série $\sum_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty}|u_{i,j}|\right)$ est convergente.

— Quand $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, on a l'égalite $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

Produit de Cauchy.

— On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries complexes **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy converge absolument et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Suites et séries de fonctions

A désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A.

Convergence simple.

— La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A vers une fonction f si : $\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. La fonction f est alors unique, et est appelée limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur A si $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A.

Convergence uniforme.

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. La fonction f est alors unique, et est appelée limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur A si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.

Converge uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple. La convergence uniforme implique la convergence simple, pour les suites comme pour les séries de fonctions.

Convergence uniforme et caractère borné/continu. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et si toutes les fonctions f_n sont bornées (resp. continues) sur A, alors f est bornée (resp. continue) sur A.

Théorème de la double limite. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et si : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite b vérifie : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

Convergence normale. $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur A si la série réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge. Attention : la notion de convergence normale est réservée aux séries de fonctions.

Converge normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme. La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme.

Convergence uniforme et intégration.

— Si la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur un intervalle $[\,a\,,b\,]$ vers une fonction f, alors f est continue sur $[\,a\,,b\,]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[\,a\,,b\,]$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Convergence uniforme et dérivation.

— Si la suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur un intervalle I vers une fonction f, et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I,\ f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x).$$

— Si la série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur un intervalle I, et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Séries entières

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes. On adopte la convention $\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition.

La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions $z\mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Lemme d'Abel.

Soit $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

— $\forall z\in D(0,\rho)$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente ;

— $\forall l\in\,]\,0\,,\rho\,[$, $z\mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0,l)$.

Rayon de convergence.

— L'intervalle $\left\{\rho>0 \mid \sum_{n\geqslant 0}|a_n|\rho^n \text{ converge}\right\}$ admet une borne supérieure dans $[\,0\,,+\infty\,]$, appelé rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— Le disque (ouvert) de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est le disque $D(0,R)$, où R est le rayon de convergence.

Propriétés du rayon de convergence.

Soit R le rayon de convergence $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— Si $|z|<R$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

— Si $|z|>R$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

— Si $|z|=R$, on ne peut pas conclure.

— $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque de convergence.

— $z\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— **Règle de D'Alembert** : si : $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l\in[\,0\,,+\infty\,]$, alors : $R=\dfrac{1}{l}$.

— **Règle de Cauchy** : si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l\in[\,0\,,+\infty\,]$, alors : $R=\dfrac{1}{l}$.

Opérations algébriques et rayon de convergence.

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, de disques de convergence respectifs D_a et D_b.

— **Produit par un scalaire non nul.** Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\lambda a_n z^n$ est R, et $\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda a_n z^n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

— **Somme.** Le rayon de convergence R_{a+b} de $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ vérifie : $R_{a+b}\geqslant \inf(R_a,R_b)$.

De plus, $\forall z\in D_a\cap D_b$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

— **Produit de Cauchy.** Le rayon de convergence R_{a*b} de $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^n$ vérifie : $R_{a*b}\geqslant \inf(R_a,R_b)$.

De plus, $\forall z\in D_a\cap D_b$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Étude au bord du disque de convergence.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| t^n$ converge pour $t = R$ (resp. $t = -R$), alors la fonction définie sur $]-R\,,R]$ (resp. $[-R\,,R[$) par $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue au point R (resp. $-R$).

Intégration terme à terme.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence R, et $\forall x \in\,]-R\,,R[$, $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Dérivation terme à terme.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle x, de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{n!}{(n-r)!} x^{n-r}$ a pour rayon de convergence R, et $\forall x \in\,]-R\,,R[$, $\dfrac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} a_n \dfrac{n!}{(n-r)!} x^{n-r}$.

Développement en série entière.

— Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-r\,,r[\, \to \mathbb{K}$. f est dite développable en série entière sur $]-r\,,r[$ s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$, telle que : $\forall x \in\,]-r\,,r[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

— Si f est développable en série entière sur $]-r\,,r[$, égale à $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, alors : $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r\,,r[\,,\mathbb{K})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Développements en série entière usuels.

— $\forall x \in\,]-1\,,1[$, $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)\right) \frac{x^n}{n!}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$;

— $\forall x \in\,]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$;

— $\forall x \in\,]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$;

— $\forall x \in\,]-1\,,1[$, $\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$;

— $\forall x \in\,]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r}{r} x^n$ $\quad (r \in \mathbb{N})$;

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$;

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

— $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Dénombrements

p-listes. Une *p-liste* (ou *p-uplet*) de E est une suite de p éléments de E. Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1, 4, 1)$ est une 3-liste de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : OUI.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n, successivement et avec remise.

Arrangements. Un *arrangement* est une liste d'éléments distincts. Si $p \leqslant n$, il y a $n(n-1)...(n-p+1) = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments. Si $p > n$, il n'y en a aucun.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1, 5, 2)$ est un arrangement à 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n, successivement et sans remise.

Permutations. Une *permutation* de E est un arrangement de tous les éléments de E. Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Exemple : $(1, 3, 5, 4, 2)$ est une permutation de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n, successivement et sans remise.

Applications, injections, surjections. Soient E_p un ensemble à p éléments et F_n un ensemble à n éléments.

- Il y a autant d'applications de E_p dans F_n que de p-listes de F : n^p.
- Il y a autant d'injections de E_p dans F_n que d'arrangements à p éléments de F : A_n^p.
- Il y a autant de bijections de E_n dans F_n que de *permutations* de E : $n!$.

Parties à p éléments. Une *partie* (ou *combinaison*) de E est un sous-ensemble E. Si $p \leqslant n$, il y a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Le résultat demeure valable avec $p > n$ avec la convention $\dbinom{n}{p} = 0$.

- Notation : $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Exemple : $\{1, 3, 5\}$ est une partie à 3 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Ordre : NON. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n, simultanément.

Parties.

- En notant A l'ensemble des parties de E, et pour tout $p \in [\![0\,,\,n]\!]$, A_p l'ensemble des parties à p éléments de A, $\{A_p\}_{p \in [\![0\,,\,n]\!]}$ forme une partition de A.
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
- Il y a 2^n parties de E en tout.

Coefficients binomiaux : formules

- **Formule des compléments.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0\,,\,n]\!]$, $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$.
- **Petite formule.** $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.
- **Formule de Pascal.** $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.

Probabilités

Soit Ω un univers au plus dénombrable. L'ensemble des événements est alors $\mathcal{P}(\Omega)$.

Evénements incompatibles.

— A et B sont incompatibles si : $A \cap B = \varnothing$.

— Si $A_1, A_2, \dots A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Système complet. $\{A_i\}_{i\in I}$ est un système complet d'événements si :

— $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
— $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
— $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Tribu. On appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

— $\Omega \in \mathcal{T}$.
— $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.
— Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Conséquences immédiates de la définition. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.

— $\varnothing \in \mathcal{T}$.
— $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie et par intersection finie.
— Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore dans $\mathcal{T}$.
— Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap \bar{B} \in \mathcal{T}$.

Espace probabilisable et événement. Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Ω.

— Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace probabilisable**.
— Un élément A de $\mathcal{T}$ est appelé **événement**.

Probabilité. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

— On appelle **probabilité** toute application P définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que (i) $P(\Omega) = 1$ et (ii) pour toute suite $(A_n)_n$ d'événements deux à deux disjoints, la série $\sum P(A_n)$ converge et $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

— On appelle alors le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**.

— Sur un tel espace, pour tout $A \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{a\in A} P(\{a\})$.

Probabilité uniforme. En situation d'équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\mathrm{card} A}{\mathrm{card}\Omega}$.

Théorème de la limite monotone.

— Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Inégalité de Boole.

— Si $(A_n)_n$ une suite d'événements telle que la série $\sum P(A_n)$ converge, alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Événements négligeables et presque sûrs.

— Un événement A est dit **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.
— Un événement A est dit **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.
— Une réunion **au plus dénombrable** d'événements négligeables est un événement négligeable.
— Une intersection **au plus dénombrable** d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

Probabilité conditionnelle. Soit un événement $A \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle.

— L'application $P_A : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifiant $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ est une probabilité.
— P_A est appelée **probabilité conditionnellement à** A ou encore probabilité sachant A.
— On note la probabilité de B sachant A : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.

Formule des probabilités composées. Soit $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une suite d'événements de probabilités non nulles.

— $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = \prod_{k=0}^{n} P\left(A_k | \bigcap_{l=0}^{k-1} A_l\right) = P(A_0) \times P(A_1|A_0) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$

Formule des probabilités totales.

— Un **système complet d'événements** est une partition au plus dénombrable de Ω. C'est donc une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, où I est au plus dénombrable, telle que $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$ et $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.
— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors :
$\forall B \in \mathcal{T},\ P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n).$

Formule de Bayes.

— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et B est un événement de probabilité également non nulle, alors :
$\forall i \in \mathbb{N},\ P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)} = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}.$

Événements indépendants.

— On dit que deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
— Lorsque $P(A) > 0$, cette condition est équivalente à $P(B|A) = P(B)$.
— Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

Indépendance d'une suite d'événements.

— Une suite d'événement $(A_n)_{n\in I}$ au plus dénombrable (avec $I \subset \mathbb{N}$) est une suite d'**événements mutuellement indépendants** lorsque pour tout ensemble fini $J \subset I$, on a : $P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$.
— Si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors ces événements sont indépendants deux à deux. **Attention !** La réciproque est fausse !
— Si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(A_k)$.

Variables aléatoires discrètes

Soient Ω un univers au plus dénombrable et E un ensemble donné.

Variable aléatoire discrète.

— Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω et à valeur dans E est une application $X : \Omega \to E$ vérifiant :
  - $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
  - Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega \,|\, X(w) = x\}$ est un événement. On note cet événement $(X = x)$.

— Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire **réelle**.

Support. Le *support* de X est l'ensemble de ses valeurs prises, noté $X(\Omega)$. Une variable aléatoire réelle est discrète si son support est fini ou dénombrable.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire. Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.

— L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X(\Omega))$ est une tribu sur $X(\Omega)$.
— L'application $P_X : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie par $P_X(A) = P(X \in A)$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{A})$.
— La probabilité P_X est appelée **loi de probabilité de la variable aléatoire** X.
— On dit de deux variables aléatoires X et Y qu'elles sont **équiréparties** lorsqu'elles ont la même loi : $P_X = P_Y$. On note alors $X \sim Y$. **Attention !** On peut avoir $X \sim Y$ mais avec $X \neq Y$.

Fonction de répartition. La fonction de répartition de X est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ qui à tout réel x associe $P(X \leqslant x)$. F_X est croissante, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$. Elle est continue en tout point, sauf aux points x tels que $P(X = x) \neq 0$, où elle est continue à droite.

Espérance.

— $E(X) = \sum\limits_{x_k \in X(\Omega)} x_k P(X = x_k)$. L'espérance est une moyenne pondérée.
— Si $X(\Omega) \subset [a,b]$, $a \leqslant E(X) \leqslant b$. Si $X(\Omega) \subset]a,b[$, $a < E(X) < b$. Si $E(X) = 0$, X est dite centrée.
— $E(aX + b) = aE(X) + b$. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Théorème de transfert. $E(f(X)) = \sum\limits_{x_k \in X(\Omega)} f(x_k) P(X = x_k)$.

Variance.

— $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = \sum\limits_{x_k \in X(\Omega)} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$. La variance est une mesure de dispersion.
— $V(X) \geqslant 0$. Si $V(X) = 0$, X est (presque sûrement) constante. Si $V(X) = 1$, X est dite réduite.
— $V(aX + b) = a^2 V(X)$. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y)$ (cf. infra).

Ecart-type.

— $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$.
— $\sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$.

Loi uniforme $\mathscr{U}([\![1, n]\!])$. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$; $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$; $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$; $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. $X(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$; $E(X) = p$; $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$; $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$; $E(X) = np$; $V(X) = np(1 - p)$.

Loi géométrique $\mathscr{G}(p)$. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = q^{k-1} p$; $E(X) = \dfrac{1}{p}$; $V(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$. X suit une loi géométrique si et seulement si : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, P(X > n + m | X > n) = P(X > m)$ (loi sans mémoire)

Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. $X(\Omega) = \mathbb{N}$; $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$; $E(X) = \lambda$; $V(X) = \lambda$

Inégalité de Markov. Si X est à valeurs positives : $\forall \varepsilon > 0,\ P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{E(X)}{\varepsilon}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Vecteurs aléatoires

Couple de variables aléatoires.

— Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E, alors $X = (X_1, X_2) : \Omega \to E^2$ définie par $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E^2.

— **Loi conjointe.** On appelle **loi conjointe de** X_1 **et** X_2 la loi $P_X = P_{(X_1,X_2)}$. Elle est déterminée par : $\forall (x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P_X(x_1, x_2) = P(X = (x_1, x_2)) = P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2))$.

— **Lois marginales.** On appelle **lois marginales du couple** (X_1, X_2) les lois P_{X_1} et P_{X_2} définies sur $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$ par : $\forall x \in X_1(\Omega), P_{X_1}(x) = P(X_1 = x) = \sum\limits_{y \in X_2(\Omega)} P_X(x, y)$ et $\forall y \in X_2(\Omega), P_{X_2}(y) = \sum\limits_{x \in X_1(\Omega)} P_X(x, y)$.

Loi conditionnelle.

— Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles. On considère $x \in \mathbb{R}$ tel que l'événement $P(X = x) > 0$ et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

— L'application $P_{(X=x)} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que $A \longmapsto P_{(X=x)}(Y \in A) = \dfrac{P((X = x) \cap (Y \in A))}{P(X = x)}$ est une probabilité.

— On appelle cette probabilité **loi conditionnelle de** Y **sachant** $(X = x)$.

Variables aléatoires indépendantes.

— On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), ..., (X_n = x_n)$ sont indépendants.

— Dans ce cas, $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.

— Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires **indépendantes** et que $X = (X_1, X_2)$, alors : $\forall (x_1, x_2) \in X(\Omega), P_X(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)$.

— La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles **indépendantes** si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes.

Fonction d'une variable aléatoire.

— Soient $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \to F$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans F. On la note $f(X)$.

— Soient $X_1, X_2, ...X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes, f et g deux fonctions et $m \in \{1, 2, ..., n-1\}$, alors $f(X_1, X_2, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Covariance.

— **Définition.** $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$. Si $\text{cov}(X, Y) > 0$, X et Y sont positivement corrélées. Résultat analogue si $\text{cov}(X, Y) < 0$. Si $\text{cov}(X, Y) = 0$, X et Y ne sont pas corrélées.

— **Formule de Koenig-Huygens.** $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

— **Propriétés.** $\text{cov}(X, X) = V(X)$. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$. $\text{cov}(aX + bY, Z) = a\,\text{cov}(X, Z) + b\,\text{cov}(Y, Z)$. Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$. La réciproque est fausse.

Coefficient de corrélation linéaire. $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.$|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$. Si $|\rho_{X,Y}| = 1$, alors on a, presque sûrement (c'est-à-dire avec une probabilité égale à 1) : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $Y = aX + b$.

Variables à densité

Fonction de répartition. X est une variable aléatoire à densité si sa fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini ou dénombrable de points.

Densité. f est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini ou dénombrable de points, et telle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaille 1.

Si F est la fonction de répartition de X, alors toute fonction f telle que $F' = f$ aux points oà F est dérivable est une densité de X. Si f est une densité de X, alors la fonction de répartition de X est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. La fonction F est de classe C^1 partout là où f est continue. Plus généralement, si f est continue à droite (resp. à gauche) en x, alors F est dérivable à droite (resp. à gauche) en x.

Loi uniforme $\mathscr{U}([a,b])$.

- **Support.** $X(\Omega) = [a,b]$.
- **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ si $t \in [a,b]$ et $f(t) = 0$ sinon.
- **Fonction de répartition.** La fonction de répartition de X est la fonction F définie par : $F(x) = 0$ si $x < a$, $F(x) = 1$ pour $x > b$ et : $\forall x \in [a,b],\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$.
- **Espérance, variance.** $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$. $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.

- **Support.** $X(\Omega) =]0,+\infty[$.
- **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ si $t > 0$ et 0 sinon.
- **Fonction de répartition.** La fonction de répartition de X est la fonction F définie par : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x > 0$ et 0 sinon.
- **Espérance, variance.** $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma)$.

- **Support.** $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
- **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$.
- **Espérance, variance.** $E(X) = m$. $V(X) = \sigma^2$.

Loi normale centrée-réduite $\mathscr{N}(0,1)$.

- **Support.** $X(\Omega) = \mathbb{R}$.
- **Densité.** Une densité de X est la fonction f définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$. $E(X) = 0$.
- **Fonction de répartition.** On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée-réduite. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- **Espérance, variance.** $E(X) = 0$. $V(X) = 1$.

Propriétés de stabilité des lois classiques.

- Si $a < b$, X suit la loi $\mathscr{U}[0,1] \Leftrightarrow a + (b-a)X$ suit la loi $\mathscr{U}[a,b]$.
- Si Y suit la loi $\mathscr{U}[0,1[$, alors $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$ suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
- Si $a \neq 0$, X suit la loi normale $\mathscr{N}(m,\sigma^2) \Leftrightarrow aX + b$ suit la loi $\mathscr{N}(am+b, a^2\sigma^2)$.
- Si X et Y, indépendantes, suivent $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathscr{N}(m',\sigma'^2)$, $X+Y$ suit la loi $\mathscr{N}(m+m', \sigma^2+\sigma'^2)$.

Théorème de transfert. Si X admet une densité f nulle en-dehors d'un intervalle $]a,b[\big((a,b) \in \bar{\mathbb{R}}^2\big)$, et si g est une fonction continue sauf peut-être en un nombre fini de points sur $]a,b[$, alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et on a alors : $E(g(X)) = \displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Moment d'ordre r. X admet un moment d'ordre r, noté $m_r(X)$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^r f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, et on a alors : $E(X^r) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,\mathrm{d}t$.