Structures algébriques

Groupe. Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un **groupe** si :
— la loi $*$ est **associative** $(\forall (x, y, z) \in G^3, (x * y) * z = x * (y * z))$,
— G admet un **élément neutre** pour la loi $*$ $(\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x)$,
— tout élément de G est **inversible** (ie. admet un **symétrique**) pour la loi $*$ $(\forall x \in G, \exists x' \in G, x * x' = x' * x = e)$.

Sous-groupe. $H \subset G$ est un **sous-groupe** de $(G, *)$ si :
— H contient l'**élément neutre** de G pour la loi $*$,
— H est **stable** pour la loi $*$ $(\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H)$,
— $\forall a \in H, a^{-1} \in H$.
Caractérisation d'un sous-groupe : H est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si :
— H est non vide,
— $\forall (x, y) \in H^2, x * y^{-1} \in H$.

Groupe commutatif. G est un groupe **commutatif** si la loi $*$ est **commutative** $(\forall (x, y) \in G^2, x * y = y * x)$. La loi de composition est alors souvent notée $+$.

Groupe cyclique. G est un groupe **cyclique** si le groupe G est fini (ie. il admet un nombre fini d'élements, et admet un générateur.

Morphisme de groupe. f est un **morphisme de groupes** de $(G_1, *_1)$ sur $(G_2, *_2)$ si : $\forall (x, y) \in G_1^2, f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$. On dit que f est un **isomorphisme** de groupe si f est de plus **bijective**.

Anneau. Un ensemble A non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un anneau si :
— $(A, +)$ est un **groupe commutatif**,
— la loi $*$ est **associative** et **distributive** par rapport à la loi $+$,
— A admet un **élément neutre** pour la loi $*$.

Sous-anneau. $B \subset A$ est un **sous-anneau** de $(A, +, *)$ si :
— B est un **sous-groupe** de $(A, +)$,
— B est **stable** pour la loi $*$ $(\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B)$,
— B contient l'**élément neutre** de A pour la loi $*$.
Caractérisation d'un sous-anneau : B est un sous-groupe de $(A, +, *)$ si et seulement si :
— B est **stable** pour la loi $*$ $(\forall (x, y) \in B^2, x * y \in B)$,
— B contient l'**élément neutre** de A pour la loi $*$,
— $\forall (x, y) \in B^2$, $(x + (-y)) \in B$ (où $(-y)$ désigne le symétrique de y pour la loi $+$).

Idéaux. Une partie non vide I d'un anneau commutatif $(A, +, *)$ est un **idéal** de A si :
— I est stable pour la loi $+$,
— $\forall (a, i) \in A \times I, (a * i) \in I$.

Intégrité. Un anneau $(A, +, *)$ est dit **intègre** s'il est **non nul** ($0_A \neq 1_A$ ie. $A = \{0_A\}$), **commutatif** et si : $\forall (a, b) \in A^2, a * b = 0_A \implies a = 0_A$ ou $b = 0_A$.

Corps. Un ensemble K non vide muni de deux lois de compositions internes $+$ et $*$ est un **corps** si :
— $(K, +, *)$ est un **anneau** non réduit à $\{0_K\}$, où $\{0_K\}$ est l'élément neutre de K pour la loi $+$.
— la loi $*$ est **commutative**,
— tout élément de K
$\{0_K\}$ admet un **symétrique** pour la loi $*$.

Sous-corps. $L \subset K$ est un **sous-corps** de $(K, +, *)$ si :
— L est un **sous-anneau** de $(K, +, *)$,
— $(L, +, *)$ est un **corps**.