POLYNÔMES

Définitions. Si $P = P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, P est de degré n, de coefficient dominant a_n, de monôme de plus haut degré $a_n X^n$.

Racines, ordre de multiplicité.

— λ est racine de $P \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (X - \lambda)$ divise P.
— λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow \big((X-\lambda)^k$divise P et $(X-\lambda)^{k+1}$ ne divise pas $P\big)$.
— λ est racine de P d'ordre de multiplicité $k \Leftrightarrow \big(\forall i \in [\![0\,,\, k-1]\!] P^{(i)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0)\big)$.

Théorème de D'ALEMBERT. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe. Corollaire : tout polynôme de degré n admet exactement n racines complexes, en tenant compte des ordres de multiplicité.

Polynômes irréductibles.

— Un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P n'admet aucun diviseur trivial (i.e. les constantes non nulles et les multiples non nuls de P) dans $\mathbb{K}[X]$.
— Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
— Les polynômes irréductiles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 2 n'admettant aucune racine réelle.
— Tout polynôme s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous forme de produit de polynômes irréductibles.

Polynômes scindés. Un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit sous la forme : $P(X) = \alpha \prod\limits_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, où α et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$. On dit que P est scindé à racines simples si les λ_k sont distincts. Dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non constant est scindé sur $\mathbb{C}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α, pour racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, alors : $P(X) = \alpha \prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Décomposition d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$. Si P a pour coefficient dominant α, pour racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$, et pour racines complexes conjuguées $\mu_1, \bar{\mu_1}, \mu_2, \bar{\mu_2}, \dots, \mu_m, \bar{\mu_m}$, d'ordres de multiplicité respectifs $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$, alors : $P(X) = \alpha \left[\prod\limits_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}\right] \left[\prod\limits_{k=1}^{m} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\mu_k) + |\mu_k|^2\right)^{\beta_k}\right]$.

Formule de TAYLOR pour les polynômes. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$.

Polynômes d'interpolation de LAGRANGE.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n-liste $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour tout $j \in [\![1\,,\, n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $L_j(x_i) = \delta_{i,j}$.
— $\forall j \in [\![1\,,\, n]\!]$, $L_j(X) = \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq j} \dfrac{X - x_i}{x_i - x_j}$. La famille $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ forme une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute n-liste $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments distincts de $\mathbb{C}$ et pour toute n-liste $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ d'éléments de $\mathbb{C}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1\,,\, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$.
— Cet unique polynôme est égal à : $P(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i L_i$.