Nombres complexes

Exponentielle complexe. $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Les deux écritures d'un nombre complexe non nul.

- $z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$.
- $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r\cos\theta - i\,r\sin\theta$. $z\overline{z} = |z|^2$.
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r + a}$.

Inégalité triangulaire. $\forall(x, y) \in \mathbb{C}^2, |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Formule de Moivre. $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En particulier :

- $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\cos n\theta = \mathrm{Re}\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$.
- $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sin n\theta = \mathrm{Im}\,((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$.

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Fonction exponentielle complexe. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^{\mathrm{Re}\,z}e^{i\,\mathrm{Im}\,z}$. Pour tous complexes z et z' :

- $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
- $\dfrac{1}{\exp z} = \exp(-z)$.
- $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
- $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z = z' \equiv 2i\pi$.

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On note : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.\}$. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Racines n^{iemes} de l'unité, groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Avec $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

- **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de 1 est l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![0\,,\, n-1]\!]\right\}$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Si z est racine de l'unité, $\overline{z}$ l'est aussi.
- **Somme.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
- **Produit.** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Racines n^{iemes} d'un complexe non nul. Avec $n \geqslant 2$ et $z = re^{i\theta}$:

- **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de z est l'ensemble $\left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right\}$.
- **Somme.** La somme des racines n^{iemes} de z vaut 0.
- **Produit.** Le produit des racines n^{iemes} de z vaut $(-1)^{n-1}z$.