FONCTIONS : LIMITES ET CONTINUITÉ

Limite finie en un point. $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f,\ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.
Limite infinie en un point. $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f,\ |x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>A$.
Limite finie en $+\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Leftrightarrow \forall A>0, \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathcal{D}_f, x>x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$.
Limite infinie en $+\infty$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall A>0, \exists x_0\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathcal{D}_f, x>x_0 \Rightarrow f(x)>A$.
Définitions analogues pour des limites en un point à gauche, à droite, ou en en $-\infty$, ou des limites égales à $-\infty$.

Caractérisation séquentielle. $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Croissance. f est croissante sur I si : $\forall(x,y)\in I^2$, $(x\leqslant y)\Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$.
Définitions analogues pour la stricte croissance, la décroissance, la stricte décroissance.

Théorème les plus importants sur les limites.

— **Théorème de la limite monotone.** Toute fonction croissante sur $]a,b[$ admet en a une limite à droite, finie ou égale à $-\infty$; en b une limite à gauche, finie ou égale à $+\infty$; et en tout point $x_0\in]a,b[$, une limite finie à droite et une limite à gauche. Résultats analogues pour les fonctions décroissantes.
— **Théorème de l'encadrement.** Si au voisinage de x_0 : $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$, et si les fonctions f et g admettent une limite finie commune ℓ en x_0, alors la fonction g admet pour limite ℓ en x_0.
— **Théorème de prolongement des inégalités.** Si au voisinage de x_0 : $f(x)\leqslant g(x)$, et si les fonctions f et g admettent en x_0 une limite finie, respectivement égales à ℓ et ℓ', alors : $\ell\leqslant\ell'$.

Comparaison de fonctions.

— **Fonctions négligeables.** f est négligeable devant g au voisinage de x_0, et l'on note $f(x)=o(g(x))$, si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 et une fonction ε de limite nulle telles que pour tout $x\in\mathcal{V}$, $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$.
— **Fonctions équivalentes.** f est équivalente à g lorsque au voisinage de x_0, et l'on note $f(x)\underset{x_0}{\sim}g(x)$, si $f(x)-g(x)=o(g(x))$, i.e. si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x\in\mathcal{V}$, $f(x)=h(x)g(x)$, où $\lim_{x\to x_0} h(x)=1$.

Equivalents usuels.
— $\ln(1+x)\underset{0}{\sim}x$.
— $\ln u\underset{1}{\sim}u-1$.
— $e^x-1\underset{0}{\sim}x$.
— $(1+x)^\alpha-1\underset{0}{\sim}\alpha x$.
— $\sin x\underset{0}{\sim}x$.
— $\cos x-1\underset{0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

Continuité. f est continue en x_0 si : $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, i.e. : $\forall\varepsilon>0, \exists\alpha>0, \forall x\in\mathcal{D}_f,\ |x-x_0|<\alpha\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. f est continue sur I si f est continue en tout point de I. Les opérations élémentaires conservent la continuité. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes sur se ce segment.

Théorème des valeurs intermédiaires. Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour toute valeur intermédiaire λ strictement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$: $\exists c\in]a,b[, f(c)=\lambda$. Si f est strictement monotone, cette solution est unique (théorème dit "de la bijection"). La fonction réciproque f^{-1} est alors continue et de même monotonie que f.

Fonctions lipschitziennes. f est k-lipschitzienne sur I si $\forall(x,y)\in I^2, |f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|$. Toute fonction lipschitzienne est continue.