Espaces vectoriels

$(E, +, .)$ désigne un $\mathbb{K}$- espace vectoriel. Les éléments u_i sont éléments de E et les λ_i sont éléments de $\mathbb{K}$.

Sous-espace vectoriel. F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si $F \subset E$, si $F \neq \varnothing$, et si F est stable par loi $+$ et par la loi $.$, i.e. si : $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda u + \mu v) \in E$. En particulier, sont des sous-espaces vectoriels de E : tout espace s'écrivant sous forme $Vect(u_1, ..., u_n)$, $Kerf$ (si f est une application linéaire définie sur E) ou encore Imf (si f est une application linéaire à valeurs dans E.)

Combinaison linéaire On dit que u est combinaison linéaire de $u_1, u_2, ..., u_n$ si il existe une n-liste $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, u_2, ..., u_n$ est noté $\text{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n)$.

Famille libre. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille libre de E si : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1 , n]\!]$, $\lambda_i = 0$.

Famille liée. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une famille liée de E si ce n'est pas une famille libre de E, i.e. si au moins un des éléments de cette famille est combinaison linéaire des autres.

Famille génératrice. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est génératrice de E si : $\forall u \in E$, $\exists \, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \, , u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Base. $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ n est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E, i.e. si : $\forall u \in E$, $\exists! \, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \, , u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Liens en dimension finie. Si E est de dimension finie n :

- Toute famille libre de E admet au maximum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est maximale). Toute famille libre et maximale de E est une base de E.
- Toute famille génératrice de E admet au maximum n éléments (on dit dans ce cas qu'elle est minimale). Toute famille libre et minimale de E est une base de E.

Théorème de la base incomplète. Si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E, alors (avec certains vecteurs bien choisis de E), on peut la compléter en une base $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E.

Sommes, sommes directes. La somme de deux s.e.v. F et G de E est donnée par : $F+G = \{x + y, \, x \in F, \, y \in G\}$. La somme $F + G$ est directe si cette décomposition est unique pour tout élément de $F + G$. F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires. F et G sont supplémentaires dans E (et l'on note $F + G = F \oplus G$) si l'une de ces conditions est remplie :

- $\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G$, $x = y + z$,
- $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$,
- F et G sont respectivement le noyau et l'image d'un projecteur p de E,
- $F = Ker(s - id)$ et $G = Ker(s + id)$, où s est une symétrie de E,
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$,
- la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E,
  les deux dernières méthodes n'étant applicables qu'en dimension finie.