Ensembles, applications, sommes

Partition. $\{A_i\}_{i\in I}$ est une partition de Ω si :

— $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
— $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
— $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Ensemble stable. A est stable par f si : $f(A) \subset A$, i.e. si : $\forall x \in A, f(x) \in A$.

Relation d'ordre. $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si :

— $\mathcal{R}$ est *réflexive* : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$,
— $\mathcal{R}$ est *transitive* : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow xRz$,
— $\mathcal{R}$ est *antisymétrique* :$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Relation d'équivalence. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si :

— $\mathcal{R}$ est *réflexive*
— $\mathcal{R}$ est *transitive*
— $\mathcal{R}$ est *symétrique* : $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Image directe. Avec $f : E \to F$ et $A \subset E$: $f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists, x \in A,\ f(x) = y\}$.

Image réciproque. Avec $f : E \to F$ et $B \subset F$: $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Injections, surjections, bijections. Avec $f : E \to F$:

— f est *injective* si : $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
— f est *surjective* si : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.
— f est *bijective* si : $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$.

— Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
— Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
— Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Sommes. $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Formule du binôme. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.