Développements limités

Formule de Taylor avec reste intégral. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Formule de Taylor-Young. Si $f \in \mathcal{C}^{n}([a,b],\mathbb{R})$, lorsque x est au voisinage de a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Développements limités usuels. Lorsque x est au voisinage de 0 :

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$.
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$.
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.
- $\mathrm{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.
- $\mathrm{sh}x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$.
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$.

Développements limités et continuité, dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Si f est définie en a :

- f admet un d.l.(0) au voisinage de a si et seulement si f est continue en a.
- f admet un d.l.(1) au voisinage de a si et seulement si f est dérivable en a.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, alors f admet un d.l.(n) au voisinage de a. La réciproque est fausse.

Développements limités et dérivée, primitive. Si f est définie en a et $n \geqslant 1$:

- Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors f' admet un d.l.$(n-1)$ au voisinage de a obtenu en dérivant terme à terme le d.l(n) de f en a.
- Si f admet un d.l.(n) au voisinage de a, alors toute primitive F de f admet un d.l.$(n+1)$ au voisinage de a obtenu en intégrant (à une constante près) le d.l.(n) de f en a.