Dénombrements

p-listes. Une *p-liste* (ou *p-uplet*) de E est une suite de p éléments de E. Il y a n^p p-listes d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1,4,1)$ est une 3-liste de $\{1,2,3,4,5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : OUI.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n, successivement et avec remise.

Arrangements. Un *arrangement* est une liste d'éléments distincts. Si $p \leqslant n$, il y a $n(n-1)...(n-p+1) = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments d'un ensemble à n éléments. Si $p > n$, il n'y en a aucun.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$.
- Exemple : $(1,5,2)$ est un arrangement à 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de p boules dans une urne en contenant n, successivement et sans remise.

Permutations. Une *permutation* de E est un arrangement de tous les éléments de E. Il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments.

- Notation : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Exemple : $(1,3,5,4,2)$ est une permutation de $\{1,2,3,4,5\}$.
- Ordre : OUI. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n, successivement et sans remise.

Applications, injections, surjections. Soient E_p un ensemble à p éléments et F_n un ensemble à n éléments.
- Il y a autant d'applications de E_p dans F_n que de p-listes de F : n^p.
- Il y a autant d'injections de E_p dans F_n que d'arrangements à p éléments de F : A_n^p.
- Il y a autant de bijections de E_n dans F_n que de *permutations* de E : $n!$.

Parties à p éléments. Une *partie* (ou *combinaison*) de E est un sous-ensemble E. Si $p \leqslant n$, il y a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Le résultat demeure valable avec $p > n$ avec la convention $\dbinom{n}{p} = 0$.

- Notation : $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Exemple : $\{1,3,5\}$ est une partie à 3 éléments de $\{1,2,3,4,5\}$.
- Ordre : NON. Répétition possible des éléments : NON.
- Modèle : Tirage de toutes les boules d'une urne en contenant n, simultanément.

Parties.

- En notant A l'ensemble des parties de E, et pour tout $p \in [\![0\,,\, n]\!]$, A_p l'ensemble des parties à p éléments de A, $\{A_p\}_{p \in [\![0\,,\, n]\!]}$ forme une partition de A.
- $\sum\limits_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} = 2^n$.
- Il y a 2^n parties de E en tout.

Coefficients binomiaux : formules

- **Formule des compléments.** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0\,,\, n]\!]$, $\dbinom{n}{n-p} = \dbinom{n}{p}$.
- **Petite formule.** $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$.
- **Formule de Pascal.** $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$.