Applications linéaires

E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

Définition. f est linéaire si : $\forall(u,v) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

Noyau. $\text{Ker} f = \{u \in E, f(u) = 0\}$. $\text{Ker} f$ est un s.e.v. de E. $\text{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective.

Image. $\text{Im}\ f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$. $\text{Im}\ f$ est un s.e.v. de F, et : $\text{Im}\ f = F \Leftrightarrow f$ est surjective. Si E est de dimension finie et a pour famille génératrice $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\text{Im}\ f = \text{Vect}\,(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n))$.

Formule du rang. Si E est de dimension finie : $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im}\ f = \dim E$.

Propriété. Si E et F sont de *même dimension finie* : f est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

Droites, plans, hyperplans.

- Un s.e.v. de E est une droite s'il est de dimension 1, un plan s'il est de dimension 2, un hyperplan s'il est le supplémentaire d'une droite dans E. Si E est de dimension finie, un hyperplan de E est un s.e.v. de E de dimension $n-1$.
- Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle en forme une base.
- Les noyaux des formes linéaires non nulles sur E sont les hyperplans de E. Démonstration à connaître, à l'aide de la formule du rang et du théorème de la base incomplète.

Endo-, iso-, automorphismes.

- f est un endomorphisme de E si f est linéaire de E dans E.
- f est un isomorphisme de E si f est linéaire et bijective de E dans F.
- f est un automorphisme de E si f est linéaire bijective de E dans E.
- f est une forme linéaire sur E si f est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Caractérisation des isomorphismes. f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si l'une de ces conditions (équivalentes) est remplie :

- $\forall v \in F, \exists! u \in E, f(u) = v$.
- Il existe g, linéaire de F dans E, telle que $f\,o\,g = id$ et $g\,o\,f = id$.
- f est injective ($\text{Ker} f = \{0\}$) et f est surjective ($\text{Im}\ f = F$).
  Si $\dim E = \dim F$, f est un isomorphisme si, et seulement si :
- f est injective ou surjective, les deux propositions étant alors équivalentes.
- f transforme une base (ou "toute base") de E en une base de F.
- la matrice représentative de f est inversible.

Projecteurs. Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E. Tout élément de E s'écrit sous forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. La projection p sur E_1 parallèlement à E_2 associe à tout $x \in E$ sa composante $x_1 \in E_1$. On a :

- $\text{Ker} p = E_2$, $\text{Im}\ p = E_1$ et ainsi : $\text{Ker} p \bigoplus \text{Im}\ p = E$.
- $\text{Ker}(p - id) = E_1$ et $\text{Im}\,(p - id) = E_2$, et ainsi : $\text{Ker}(p - id) \bigoplus \text{Im}\,(p - id) = E$.
- p est un projecteur si et seulement si p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$.

Symétries. En conservant les notations précédentes, la symétrie s d'axe E_2 associe à tout $x \in E$ écrit sous forme $x = x_1 + x_2$, l'élément $x_1 - x_2$. On a :

- $\text{Ker}(s - id) = E_2$, $\text{Ker}(s - id) = E_1$ et ainsi : $\text{Ker}(s - id) \bigoplus \text{Ker}(s + id) = E$.
- $\text{Im}\,(s - id) = E_2$ et $\text{Im}\,(s + id) = E_1$, et ainsi : $\text{Im}\,(s - id) \bigoplus \text{Im}\,(s + id) = E$.
- s est une symétrie si et seulement si s est linéaire et vérifie $s \circ s = id$.