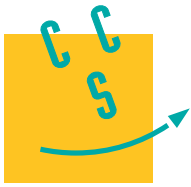


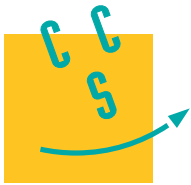
Cet exercice rend compte du comportement de la surface libre d'un fluide contenu dans un récipient dont on fait la vidange (par exemple). Dans toute la planche le régime permanent est supposé établi.

1. Donner l'expression de l'équation d'Euler pour un fluide parfait homogène incompressible soumis à l'action de forces volumiques notées \vec{f}_v .
2. En supposant que les forces de volume se réduisent à l'action de pesanteur, démontrer le théorème de Bernoulli. Quelles sont les conditions de validité de ce théorème ?
3. \vec{e}_θ étant le vecteur unitaire orthoradial en coordonnées cylindriques, on suppose que la vitesse du fluide en écoulement est de la forme $\vec{v} = \frac{a}{r}\vec{e}_\theta$. Déterminer l'expression des composantes du gradient de pression : $\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$. Donner l'expression de la composante radiale en fonction de ρ , a et r puis en fonction de ρ , v et r .
4. On utilise ce modèle pour décrire, loin du cœur, le comportement d'un tourbillon d'eau créé par la vidange d'un récipient. La surface libre se trouve à la cote $z = z_0$ pour $r \rightarrow \infty$. Déterminer l'expression de $p(r, z)$ en fonction des paramètres de l'écoulement. En déduire l'équation de la surface libre et en faire une représentation graphique. Dans quelle zone le modèle ne peut-il pas rendre compte de l'expérience ?
5. En admettant qu'au centre le fluide tourne en bloc (comme un solide), déterminer l'équation de la surface libre du fluide à laquelle conduit ce modèle. Dans quelle zone ce résultat est-il inadmissible ?
6. En considérant les deux modèles proposés dans cet exercice, décrire l'allure de la surface libre du fluide contenu dans un récipient dont on fait la vidange.



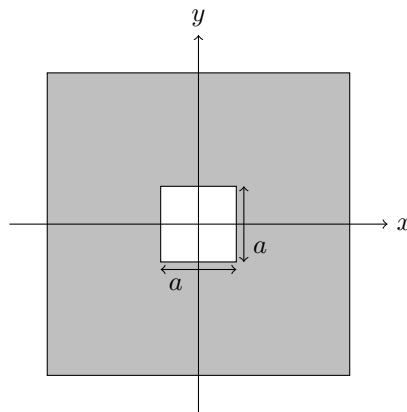
Cet exercice rend compte du comportement de la surface libre d'un fluide contenu dans un récipient dont on fait la vidange (par exemple). Dans toute la planche le régime permanent est supposé établi.

1. Donner l'expression de l'équation d'Euler pour un fluide parfait homogène incompressible soumis à l'action de forces volumiques notées \vec{f}_v .
2. En supposant que les forces de volume se réduisent à l'action de pesanteur, démontrer le théorème de Bernoulli. Quelles sont les conditions de validité de ce théorème ?
3. \vec{e}_θ étant le vecteur unitaire orthoradial en coordonnées cylindriques, on suppose que la vitesse du fluide en écoulement est de la forme $\vec{v} = \frac{a}{r}\vec{e}_\theta$. Déterminer l'expression des composantes du gradient de pression : $\frac{\partial p}{\partial r}$ et $\frac{\partial p}{\partial z}$. Donner l'expression de la composante radiale en fonction de ρ , a et r puis en fonction de ρ , v et r .
4. On utilise ce modèle pour décrire, loin du cœur, le comportement d'un tourbillon d'eau créé par la vidange d'un récipient. La surface libre se trouve à la cote $z = z_0$ pour $r \rightarrow \infty$. Déterminer l'expression de $p(r, z)$ en fonction des paramètres de l'écoulement. En déduire l'équation de la surface libre et en faire une représentation graphique. Dans quelle zone le modèle ne peut-il pas rendre compte de l'expérience ?
5. En admettant qu'au centre le fluide tourne en bloc (comme un solide), déterminer l'équation de la surface libre du fluide à laquelle conduit ce modèle. Dans quelle zone ce résultat est-il inadmissible ?
6. En considérant les deux modèles proposés dans cet exercice, décrire l'allure de la surface libre du fluide contenu dans un récipient dont on fait la vidange.



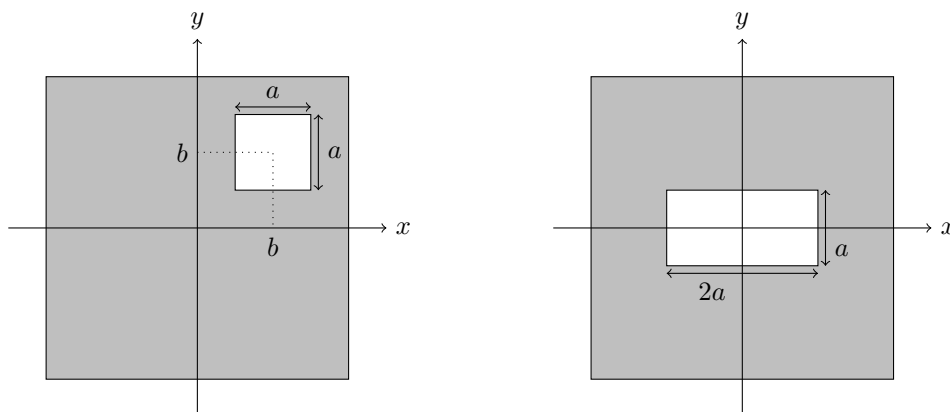
Un écran plan est découpé par une pupille de différentes formes comme indiqué sur les schémas. Il est éclairé en incidence normale par une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm. On s'intéresse à la figure de diffraction dans le plan focal image d'une lentille de projection de distance focale image $f' = 1$ m. Dans ce plan le point d'observation M est repéré par les coordonnées X et Y .

1. Dans un premier temps, la pupille sera uniquement constituée d'un carré de côté a et centrée sur l'origine. Établir l'expression de l'éclairement observé sur l'écran, dans l'approximation des petits angles.

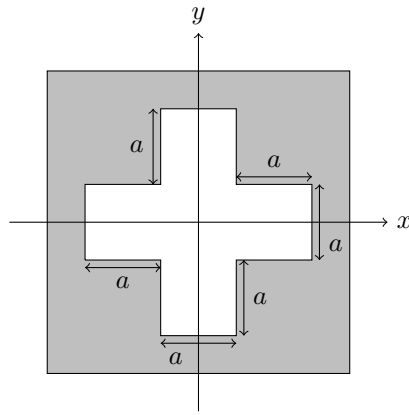


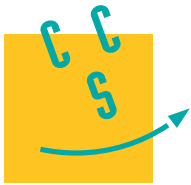
2.

- a. La pupille carrée est maintenant déplacée d'une distance b dans la direction des x et des y croissants. Déduire rapidement de la question 1 l'expression de l'éclairement observé sur l'écran, dans l'approximation des petits angles.
- b. La pupille est maintenant constituée d'une ouverture rectangulaire de largeur (suivant Ox) $2a$ et de hauteur (suivant Oy) a . Déduire l'éclairement produit par cette pupille, en liaison avec la question 1.



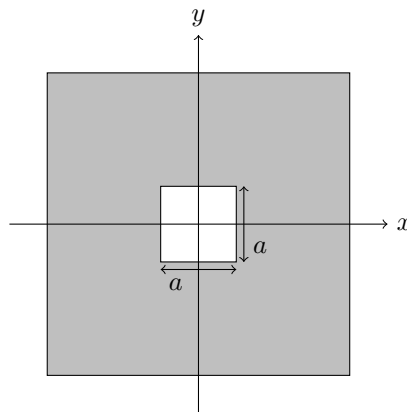
3. La pupille diffractante a désormais la forme d'une croix (voir figure). Le logiciel représente l'éclairement observé sur l'écran. Commenter la figure et déterminer a à partir de vos mesures.





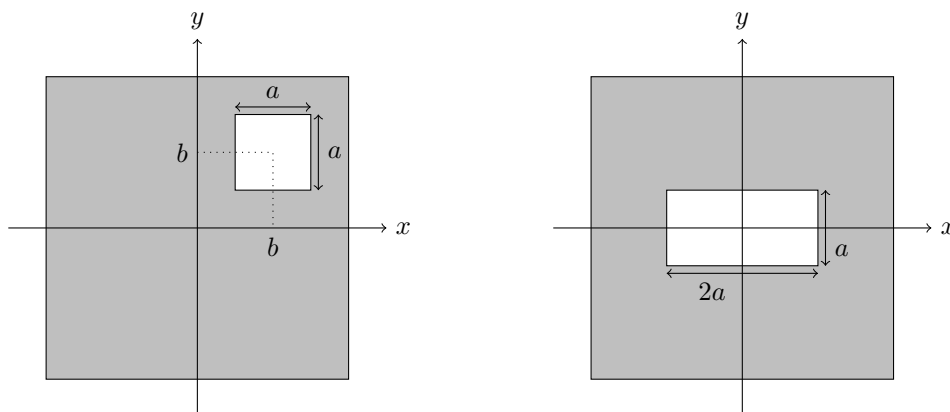
Un écran plan est découpé par une pupille de différentes formes comme indiqué sur les schémas. Il est éclairé en incidence normale par une onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. On s'intéresse à la figure de diffraction dans le plan focal image d'une lentille de projection de distance focale image $f' = 1 \text{ m}$. Dans ce plan le point d'observation M est repéré par les coordonnées X et Y .

1. Dans un premier temps, la pupille sera uniquement constituée d'un carré de côté a et centrée sur l'origine. Établir l'expression de l'éclairement observé sur l'écran, dans l'approximation des petits angles.

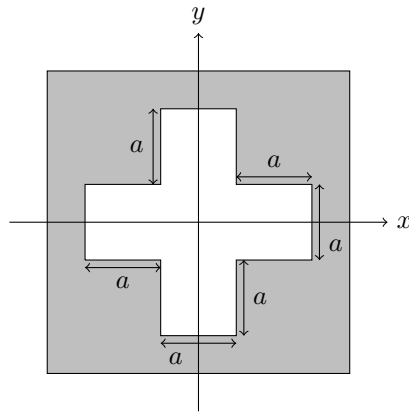


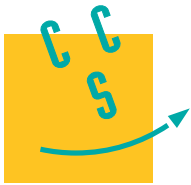
2.

- a. La pupille carrée est maintenant déplacée d'une distance b dans la direction des x et des y croissants. Déduire rapidement de la question 1 l'expression de l'éclairement observé sur l'écran, dans l'approximation des petits angles.
- b. La pupille est maintenant constituée d'une ouverture rectangulaire de largeur (suivant Ox) $2a$ et de hauteur (suivant Oy) a . Déduire l'éclairement produit par cette pupille, en liaison avec la question 1.



3. La pupille diffractante a désormais la forme d'une croix (voir figure). Le logiciel représente l'éclairement observé sur l'écran. Commenter la figure et déterminer a à partir de vos mesures.





Rayonnement d'un électron élastiquement lié

Un électron de charge $-e$ et de masse m est soumis à un champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$ et à une force de rappel $\vec{f} = -m\omega_0^2 \vec{r}$, où \vec{r} est le vecteur position de l'électron pris par rapport à sa position d'équilibre. Comme toute particule chargée accélérée, il émet un rayonnement et perd de l'énergie ; ceci est modélisé ici par une force de frottement fluide

$$\vec{f}_{\text{FR}} = -mh_0 \frac{d\vec{r}}{dt}$$

1. Montrer que la force de rappel est la même que celle que subirait l'électron en mouvement dans une boule uniformément chargée en volume, de densité volumique ρ_0 . Exprimer ρ_0 en fonction de m , e , ω_0 et ϵ_0 .
2. Décrire le mouvement de l'électron. Déterminer en particulier la représentation complexe de son vecteur position $\vec{r}(j\omega)$.
3. La puissance moyenne rayonnée par une particule de charge q et de mouvement $\vec{r}(t)$ est

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left\langle \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)^2 \right\rangle_t$$

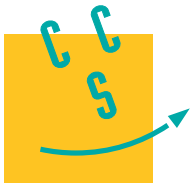
Quel lien peut-on faire entre P et le vecteur de Poynting ?

4. En écrivant la relation entre la puissance rayonnée par l'électron et la puissance du frottement fluide, déterminer h_0 .
5. Étudier la dépendance de P en ω . En déduire une interprétation de la couleur bleue de la lumière rayonnée par les molécules de l'atmosphère sous l'effet du champ électrique excitateur de la lumière solaire sachant que ω_0 est située dans le domaine des U.V.

Béton armé

Le caractère fortement basique du ciment offre la possibilité d'y inclure du fer pour former du béton armé permettant d'édifier des structures plus solides.

1. Afin de prévoir le comportement du fer dans le ciment hydraté, le diagramme potentiel-pH de l'eau et celui du fer correspondant aux espèces $\text{Fe}_{(s)}$, Fe^{2+} , Fe^{3+} , $\text{Fe}_2\text{O}_{3(s)}$, tracé pour des concentrations égales à $c = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, sont données dans un fichier Graphe2D.
 - a. Identifier parmi les espèces précédentes de l'élément fer celle qui prédomine ou existe dans les différentes zones A, B, C et D et écrire les équations des couples correspondant aux deux droites de l'eau. Retrouver à partir du diagramme les valeurs des potentiels standard des couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et Fe^{2+}/Fe .
 - b. Définir les termes suivants : immunité, corrosion, passivité. Déterminer les zones correspondantes sur le diagramme potentiel-pH du fer.
 - c. En déduire la réaction thermodynamiquement possible entre le fer et la solution au contact d'un ciment à un pH voisin de 13 et ne contenant pas de dioxygène dissous.
 - d. La corrosion du fer emprisonné dans le ciment va-t-elle avoir réellement lieu dans ces conditions ? Expliquer.
2. Au cours du temps, diverses réactions provoquent une diminution progressive du pH du ciment. À partir de quel pH la corrosion du fer emprisonné dans le ciment va-t-elle se produire ? Expliquer les transformations observées et préciser le produit de la corrosion.



Étude d'un cryostat

Un cryostat est un appareil destiné à maintenir une température très basse dans une enceinte par circulation d'un gaz liquéfié. Il comporte un bloc en laiton dans lequel circule un courant de diazote. Le diazote, aspiré par une pompe, entre liquide dans le cryostat et ressort à l'état gazeux. Le bloc en laiton est isolé de l'extérieur par un vase de Dewar et ainsi, le bloc de laiton et le diazote contenu à l'intérieur du cryostat forment un système thermiquement isolé.

On supposera que la pression du diazote reste voisine de 1 bar dans tout le dispositif. On donne

- température d'ébullition du diazote sous 1 bar : $T_0 = -195 \text{ °C}$;
- chaleur latente massique de vaporisation du diazote à T_0 : $L = 199 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- capacité thermique massique à pression constante du diazote gazeux supposée indépendante de la température : $c_p = 1,05 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique du diazote liquide à T_0 : $\mu = 0,808 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$;
- capacité massique du laiton, supposée constante : $c = 0,33 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse du bloc de laiton : $M = 10 \text{ kg}$.

Le diazote entre à l'état liquide dans le cryostat et ressort gazeux à la température T_0 avec un débit massique permanent noté D_m ; la température initiale du laiton vaut $T_1 = 20 \text{ °C}$. À l'intérieur du cryostat, le diazote ne reçoit aucun autre travail que celui des forces de pression et le conduit dans lequel il circule autorise les échanges thermiques avec le laiton. Dans toute la suite, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle.

1. Effectuer un bilan d'énergie entre les instants t et $t + dt$ sur le diazote compris entre l'entrée et la sortie du cryostat.
2. Faire de même en prenant cette fois pour système le bloc de laiton.
3. En déduire que la température dans le laiton varie selon l'expression $T = T_1 - \alpha t$ où α est une constante positive à exprimer en fonction de D_m , L , M et c .
4. Quelles sont la masse et le volume d'azote liquide nécessaires pour faire passer la température du laiton de T_1 à $T_2 = T_0$? Application numérique.
5. Reprendre les questions précédentes en supposant que le diazote sort du cryostat non pas à T_0 , mais à la température $T(t)$ du laiton. On supposera néanmoins que l'écoulement du diazote reste quasi permanent. Déterminer, dans ces conditions, le nouveau volume de diazote liquide nécessaire pour que la température du laiton passe de T_1 à T_2 .

Dimérisation du butadiène

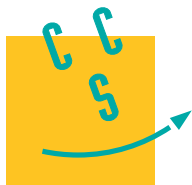
1. Donner la formule développée du buta-1,3-diène. Proposer des formes mésomères sachant qu'on observe que cette molécule est plane.
2. Le butadiène noté B , se dimérise en phase gazeuse pour donner le vinylcyclohexène noté B_2 , selon la réaction $2B \rightarrow B_2$.

Une étude expérimentale menée à 326 °C donne les variations en fonction du temps de pression totale P du mélange réactionnel gazeux dans un réacteur fermé de volume constant V :

t (min)	0	3,25	6,12	14,30	29,18	49,50	68,05	90,05	119,00	135,72
P (bar)	0,84239	0,82440	0,80853	0,76788	0,71363	0,66391	0,63259	0,60420	0,57688	0,56355

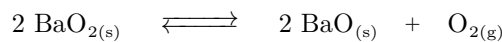
Par ailleurs, d'autres expériences montrent que le temps de demi-réaction varie lorsque la quantité de matière initiale varie.

- a. Exprimer à l'instant t , la concentration $[B]$ en fonction de P , $P_0 = P(t = 0)$, R et T .
- b. Montrer simplement que l'ordre de la réaction par rapport au butadiène ne peut être égal ni à 0, ni à 1.
- c. Montrer qu'une cinétique d'ordre 2 est compatible avec le tableau de valeurs expérimentales. En déduire la valeur de la constante de vitesse.



Étude d'un équilibre hétérogène

Soit l'équilibre entre deux oxydes de baryum



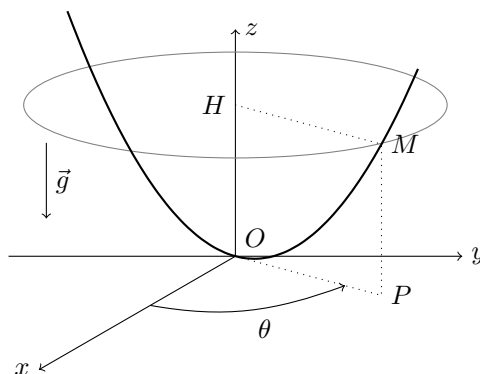
On mesure la pression à l'équilibre pour différentes températures

T (K)	1000	1067	1108	1160
P (bar)	0,186	0,497	0,945	1,845

1. Définir et calculer la variance de ce système à l'équilibre. Commenter le résultat.
2. Exprimer la constante K° .
3. Dans un récipient vide de 2,4 L, on introduit 8,45 g de $\text{BaO}_{2(s)}$ à 1000 K. Calculer la composition du système à l'équilibre et la pression en dioxygène.
4. Dans quel sens l'équilibre se déplace-t-il si on augmente la température ? Déterminer la température pour laquelle un des solides disparaît lors du chauffage du récipient.

Mouvement d'un point matériel

On étudie le mouvement d'un point matériel M , de masse m , sous l'action du champ de pesanteur \vec{g} , à l'intérieur d'une cavité dans le référentiel terrestre galiléen. La surface de cette cavité est un parabolôïde de révolution, d'axe vertical ascendant (O, z) dont l'équation en coordonnées cylindriques est $r^2 = az$. Le point M glisse sans frottement sur cette surface. On repère M à l'aide des coordonnées cylindriques (r, θ, z) et $\vec{OP} = r\vec{u}_r$.



1. Exprimer le moment cinétique du point M en projection sur l'axe (O, z) ; démontrer que celui-ci se conserve au cours du mouvement et reste égal à une constante notée L_0 .
2. Exprimer, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'énergie mécanique E_m de M dans le champ de pesanteur. Quelle propriété possède-t-elle ?

3. Dédurre de ce qui précède une équation du premier ordre en $r(t)$, de la forme

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2G(r) + E_{p,ef}(r) = E_m$$

où $G(r)$ est positif et sans dimension et $E_{p,ef}(r)$ est une énergie potentielle effective. Expliciter $G(r)$ et $E_{p,ef}(r)$.

4. Le fichier Maple joint trace en bleu le graphe $E_{p,ef}(r)$. Discuter la nature du mouvement de M selon les conditions initiales. Montrer que la trajectoire de M dans la cavité est nécessairement tracée sur une région limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème.
5. On se place maintenant dans le cas où on communique initialement au point M une énergie mécanique égale à la valeur minimale de $E_{p,ef}(r)$ notée $E_{p,ef \text{ min}}$.
- Donner, dans le cadre du modèle étudié, toutes les caractéristiques du mouvement du point.
 - On admet que, si les frottements sont suffisamment faibles, les résultats précédents (type de trajectoire, etc.) se conservent sur des durées brèves devant un temps caractéristique τ (que l'on ne calculera pas), cependant L_0 et E_m varient lentement. Le fichier Maple présente une animation de l'évolution de $E_{p,ef}(r)$ et E_m au cours du temps. Lancer l'animation et commenter.