

## Exercice avec préparation : Ondes acoustiques planes dans un pavillon

On considère un tuyau ayant la forme d'un pavillon de révolution autour de l'axe  $Ox$ . Le rayon à l'abscisse  $x$  est  $R(x)$ , fonction croissante de  $x$ . On appellera  $S(x) = \pi R^2(x)$  la section. Le pavillon contient de l'air dans lequel on étudie la propagation, selon  $Ox$ , d'ondes sonores planes longitudinales.

La situation perturbée par l'onde se caractérise, à l'instant  $t$ , pour la section de fluide qui était en  $x$ , au repos, par :

- le petit déplacement  $\xi(x,t)$  selon  $Ox$ ,
- la vitesse  $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x$ ,
- la surpression  $p(x,t)$ .

On note  $\mu$  et  $\chi$  les valeurs au repos de la masse volumique et de la compressibilité isentropique de l'air.

1. En considérant le système fermé constitué d'un cylindre d'axe  $Ox$  et de section  $\sigma < S(x)$ , situé au repos entre  $x$  et  $x + dx$ , établir :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial u}{\partial t}$$

2. En étudiant l'évolution du volume d'une tranche d'air délimitée par la paroi depuis une situation de repos entre  $x$  et  $x + dx$ , jusqu'à la situation perturbée à l'instant  $t$ , établir :

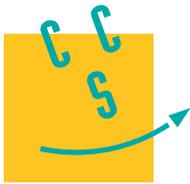
$$\frac{\partial(Su)}{\partial x} = -\chi S \frac{\partial p}{\partial t}$$

3. Dédire les *deux* équations de propagation vérifiées par  $u$  et  $p$ . On introduira  $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\mu}}$ .
4. Dans le cas d'un pavillon exponentiel :  $R(x) = R_0 e^{mx}$ , que deviennent ces équations ? On constatera que  $u$  et  $p$  obéissent alors à la même équation.
5. On cherche, en notation complexe, des solutions de la forme :  $\underline{u}(x,t) = \underline{U}(x)e^{i\omega t}$ . À quelle équation satisfait  $\underline{U}(x)$  ? Quelles sont les formes de solution selon les valeurs de la pulsation  $\omega$ . À quelle condition sur la propagation est-elle possible ? Introduire une pulsation de coupure  $\omega_c$ .
6. Préciser la relation de dispersion. On se limite, par la suite à une propagation vers les  $x > 0$ , définir et obtenir la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$ .
7. Relier  $\underline{p}$  à  $\underline{u}$ . En déduire leurs notations réelles si l'on convient d'une phase nulle pour  $u(0,0)$ .
8. On rappelle que  $e_p = \frac{1}{2}\chi p^2$ . Calculer les densités volumiques d'énergie cinétique  $\langle e_c \rangle$ , potentielle  $\langle e_p \rangle$  et mécanique  $\langle e \rangle$ . En déduire l'énergie mécanique moyenne de la tranche d'air qui, au repos, est située entre  $x$  et  $x + dx$ . Déterminer la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  fournie au niveau de l'abscisse  $x$  au repos, par le gaz de gauche au gaz de droite. Dédire la vitesse de propagation de l'énergie et la comparer à  $v_g$ . Commenter.
9. *Application numérique.*  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer  $m$  pour que la fréquence de coupure soit  $f_c = 50 \text{ Hz}$ . Quelles sont les vitesses de phase et de groupe pour  $f = 100 \text{ Hz}$  ? À partir de quelles fréquences sont-elles égales à  $c$  à 1% près ?

## Exercice sans préparation : Source radioactive

Une source radioactive, placée en un point  $O$ , émet des protons, à raison de  $N$  par seconde, de façon isotrope et permanente.

1. Déterminer le vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , en coordonnées sphériques, dans tout l'espace.
2. Dédire la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$  créé dans tout l'espace par cette distribution.



## Éléments de correction

Ondes acoustiques planes dans un pavillon

$$1. \mu \sigma dx \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma (p(x, t) - p(x + dx, t)) \text{ d'où } \mu \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Selon l'énoncé,  $x$  est la position de repos d'une section de fluide et non sa position à  $t$  en situation perturbée. C'est pourquoi l'accélération est rigoureusement la dérivée partielle de la vitesse par rapport au temps. En revanche la linéarisation liée à la faiblesse de la perturbation a permis de remplacer  $p(x + \xi(x, t), t)$  par  $p(x, t)$ .

Si le candidat propose d'exploiter l'équation d'Euler, il prend la liberté de considérer  $x$  comme la position à  $t$  de la section de fluide et c'est l'expression de l'accélération qui est linéarisée (approximation acoustique) tandis que le terme de force devient rigoureux. L'examineur est attentif à l'argumentation du candidat.

$$2. V_0 = S dx \text{ et } V - V_0 = \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \text{ ainsi } \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x}.$$

$$\text{Mais } \frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{P - P_0} \simeq -\chi \text{ soit } \frac{V - V_0}{V_0} \simeq -\chi p \text{ donc } \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} = -\chi S p.$$

$$\text{Dérivons par rapport au temps : } \frac{\partial(Su)}{\partial x} = -\chi S(x) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

$$3. \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right) \text{ soit } \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\chi S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2(S(x)u)}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) \text{ soit } \frac{\partial}{\partial x} \left( S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} S(x) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$4. R(x) = R_0 e^{mx} \text{ donc } S = S_0 e^{2mx} \text{ et } \frac{dS}{dx} = 2mS(x)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x} + 2mu \right)}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ soit } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$S \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2mS \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{ soit } \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2m \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

$$5. \underline{u} = \underline{U}(x) e^{i\omega t} \text{ donc } \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} + 2m \frac{d\underline{U}}{dx} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{U}(x) = 0 \quad \Delta = 4 \left( m^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)$$

$$a. \text{ Si } \omega < \omega_c = mc \text{ alors } \Delta > 0 \text{ et } r = -m \pm \sqrt{m^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \text{ (racines réelles négatives } -\alpha \text{ et } -\beta).$$

Donc  $\underline{U}(x) = \underline{A}e^{-\alpha x} + \underline{B}e^{-\beta x}$  soit  $\underline{u}(x, t) = \underline{A}e^{-\alpha x} e^{i\omega t} + \underline{B}e^{-\beta x} e^{i\omega t}$  : vibrations atténuées et sans propagation.

$$b. \text{ Si } \omega > \omega_c = mc \text{ alors } \Delta < 0 \text{ et } r = -m \pm i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - m^2} = -m \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}.$$

Donc  $U(x) = \left( \underline{A}e^{-\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}x} + \underline{B}e^{\frac{i}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}x} \right) e^{-mx}$  soit  $\underline{u}(x,t) = \left( \underline{A}e^{i(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{i(\omega t + kx)} \right) e^{-mx}$  avec  $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$  : superposition de deux ondes planes progressives se propageant dans des sens opposés et dont l'amplitude décroît quand  $x$  croît.

6. Relation de dispersion :  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2$  donc  $2kdkc^2 = 2\omega d\omega$ .

Vitesse de phase  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} > c$  (vitesse de propagation d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ).

Vitesse de groupe  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c$  (vitesse de propagation de l'enveloppe d'un paquet d'ondes de pulsations voisines de  $\omega$ ).

7.  $\underline{u}(x,t) = \underline{A}e^{i\omega t}e^{-(m+ik)x}$  donc  $u(x,t) = \underline{A}e^{-mx} \cos(\omega t - kx)$ .

Mais  $S\underline{u} = \underline{A}S_0 e^{i\omega t}e^{(m-ik)x}$  d'où  $\frac{\partial(S\underline{u})}{\partial x} = (m - ik)S\underline{u} = -\chi S i \omega \underline{p}$  soit  $\underline{p} = \frac{k + im}{\chi \omega} \underline{u}$ .

Donc  $p(x,t) = \frac{A}{\chi \omega} e^{-mx} (k \cos(\omega t - kx) - m \sin(\omega t - kx))$ .

8.  $e_c = \frac{1}{2} \mu u^2$  donc  $\langle e_c \rangle = \frac{1}{4} \mu A^2 e^{-2mx}$ .

$e_p = \frac{1}{2} \chi p^2$  donc  $\langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \frac{\chi A^2}{\chi^2 \omega^2} e^{-2mx} (k^2 + m^2)$  mais  $k^2 + m^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  (relation de dispersion).

Donc  $\langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \frac{A^2}{\chi c^2} e^{-2mx} = \frac{1}{4} \mu A^2 e^{-2mx} = \langle e_c \rangle$  et  $\langle e \rangle = 2\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \mu A^2 e^{-2mx}$ .

$\langle E_{x,x+dx} \rangle = \langle e \rangle S dx = \frac{1}{2} \mu A^2 S_0 dx$  est indépendant de  $x$ .

$P = pSu = \frac{A^2 S_0}{\chi \omega} \left( k \cos^2(\omega t - kx) - \frac{m}{2} \sin(2(\omega t)kx) \right)$  donc  $\langle P \rangle = \frac{k A^2 S_0}{2 \chi \omega}$  est indépendant de  $x$ .

$\langle P \rangle dt = \frac{1}{2} \mu A^2 S_0 V_{\text{énergie}} dt$  donc  $V_{\text{énergie}} = \frac{k}{\chi \mu \omega} = \frac{k c^2}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$  conformément à l'absence d'absorption qui explique également l'invariance en  $x$  de  $\frac{\langle E_{x,x+dx} \rangle}{dx}$  et de  $\langle p \rangle$ .

9.  $m = \frac{\omega_c}{c} = \frac{2\pi f_c}{c} = 0,924$ .  $\frac{\omega}{\omega_c} = 2$  donc  $v_\varphi = \frac{2c}{\sqrt{3}} = 393 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $v_g = \frac{c\sqrt{3}}{2} = 294 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

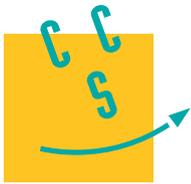
Si  $\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 \ll 1$  alors  $v_\varphi \simeq c \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$  et  $v_g \simeq c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2\right)$ .

On souhaite que  $\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 < 10^{-2}$  donc  $\omega > \frac{10\omega_c}{\sqrt{2}}$  soit  $f > 354 \text{ Hz}$ .

## Source radioactive

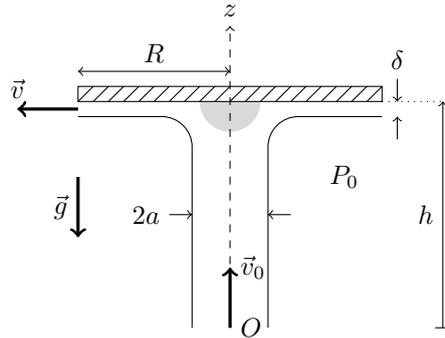
1. En considérant l'isotropie de la distribution de courant, on obtient  $\vec{j} = \frac{Ne}{4\pi r^2} \vec{u}_r$ .  $N$  s'exprime en  $\text{s}^{-1}$ ,  $e$  en C et  $j$  en  $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

2. Tout plan contenant  $O$  et passant par  $M$  est un plan de symétrie de la distribution de courant  $\vec{j}$ ; comme  $\vec{B}(M)$  doit être orthogonal à chacun des plans, on en déduit que  $\vec{B}(M) = \vec{0}$ .



## Exercice avec préparation : Lévitation d'une plaque sur un jet

On cherche à étudier l'équilibre d'une plaque, de masse  $m$ , en forme de disque de rayon  $R$ , sur un jet d'eau cylindrique, vertical, de rayon  $a \leq R$ , conformément au schéma suivant où sont définies les autres grandeurs caractéristiques du problème.

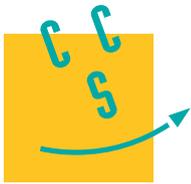


On suppose que la vitesse de l'eau, à la base du jet cylindrique en  $z = 0$ , est  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ . À la périphérie de la plaque, la vitesse de l'eau, notée  $\vec{v}$ , est radiale. L'eau est assimilée à un fluide incompressible et homogène de masse volumique  $\mu$ . L'écoulement considéré est stationnaire et partout parfait, à l'exception de la zone grisée sur la figure. La pression atmosphérique est notée  $P_0$ .

1. Exprimer  $v$  en fonction de  $v_0$ ,  $R$ ,  $a$  et  $\delta$ .
2. En utilisant la relation de Bernoulli, établir une relation liant  $v_0$ ,  $h$ ,  $\delta$ ,  $R$ ,  $a$  et  $g$ .
3. À partir d'un bilan de quantité de mouvement, établir une nouvelle relation liant  $v_0$  à d'autres paramètres du problème.
4. En s'aidant d'une représentation graphique, montrer que l'équilibre de la plaque n'est possible que si  $\delta$  est compris entre deux valeurs minimale et maximale, que l'on précisera en fonction des données.

## Exercice sans préparation : Polarisation d'une onde électromagnétique

1. Une lampe à vapeur de sodium produit une onde électromagnétique d'intensité  $I_0$ . Quelle est l'intensité de l'onde après la traversée d'un polariseur rectiligne  $P$  ?
2. Après le polariseur  $P$ , on interpose une lame quart d'onde  $L$  dont les lignes neutres font un angle  $\alpha = 10^\circ$  avec la direction de transmission privilégiée du polariseur  $P$ . Quelle est la polarisation de l'onde électromagnétique à la sortie de  $L$  ?



## Corrigé

1. Le calcul des coefficients de la décomposition en série de Fourier est grandement simplifié si le candidat prend en compte la forme du signal. L'examinateur attend évidemment que le candidat fasse ces quelques remarques simplificatrices avant de se lancer dans des calculs qui n'auraient aucun intérêt.

Tout d'abord la valeur moyenne du signal est nulle donc  $a_0 = 0$ . Ensuite, la fonction décrivant le signal est impaire donc  $a_n = 0, \forall n$ .

Enfin, le calcul donne  $b_{2p} = 0$  et  $b_{2p+1} = \frac{4E}{(2p+1)\pi}, \forall p \in \mathbb{N}$ .

Ce qui donne,

$$V_e(t) = \sum_0^{\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin((2p+1)\omega t)$$

2. Le calcul de la fonction de transfert est assez simple. Si on appelle  $I$  le courant à l'entrée, on peut écrire  $V_e = RI$  et  $V_s = -\frac{I}{jC\omega}$  soit sous forme complexe  $\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{jRC\omega}$  ou sous forme intégrale  $V_s = -\int \frac{V_e}{RC} dt$ .

Le circuit est donc un circuit intégrateur.

Si le signal d'entrée est un créneau symétrique on doit donc obtenir un signal triangulaire symétrique en sortie.

Le logiciel AnHarm permet d'étudier ce type de circuit. Charger le fichier `i31019a.fct` (Fichier/Ouvrir ou CTRL+O). Le logiciel précise que le montage est instable : tracer malgré tout le diagramme de Bode en gain de la fonction de transfert. On obtient une pente constante de  $-20$  dB/decade typique d'un circuit intégrateur. On trace la réponse du circuit à partir du menu (Oscilloscope/Permanent/Rectangulaire puis répondre OK). On observe bien qu'un créneau symétrique en entrée donne un signal triangulaire symétrique en sortie.

Comme le logiciel annonce que le montage est instable, il n'est pas trop difficile au candidat de répondre à la question du problème soulevé par ce montage. Toutefois, l'examinateur attend évidemment que le candidat précise les raisons de ce problème.

Le problème de ce type de montage est donc son instabilité. En effet, quand  $\omega \rightarrow 0$  alors  $V_s \rightarrow +\infty$ . On peut remédier à ce problème en plaçant une résistance en parallèle sur la capacité  $C$ . Si on choisit une résistance  $R$  la fonction de transfert s'écrit

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{1 + jRC\omega}$$

En basse fréquence ( $\omega RC \ll 1$ ) on a simplement  $V_s = V_e$  et en haute fréquence on retrouve l'expression précédente. Le montage est alors un filtre de type passe-bas avec une pulsation de coupure  $\omega = 1/RC$ .

Le calcul des coefficients de Fourier est grandement simplifié si le candidat remarque que  $V_s$  est proportionnelle à l'intégrale de  $V_e$ . Il n'est pas nécessaire de trouver une expression temporelle de  $V_s$  puis de calculer les coefficients à partir des équations données dans l'énoncé. Il suffit d'intégrer l'expression trouvée au 1 ce qui donne finalement

$$V_s(t) = \sum_0^{\infty} \frac{2ET}{RC((2p+1)\pi)^2} \cos((2p+1)\omega t)$$

où  $T$  est la période du signal. Les seuls coefficients non nuls sont les

$$a_{2p+1} = \frac{2ET}{RC((2p+1)\pi)^2}$$

Le logiciel permet une étude de Fourier des signaux d'entrée et de sortie. Choisir par exemple [Fourier/Entrée/Reconstruction] et conserver le nombre d'harmoniques proposé par le logiciel (10). Il est clair que 10 harmoniques ne suffisent pas à reconstituer le signal d'entrée. En changeant le nombre d'harmoniques impliquées on constate que même une centaine d'harmoniques reste insuffisant.

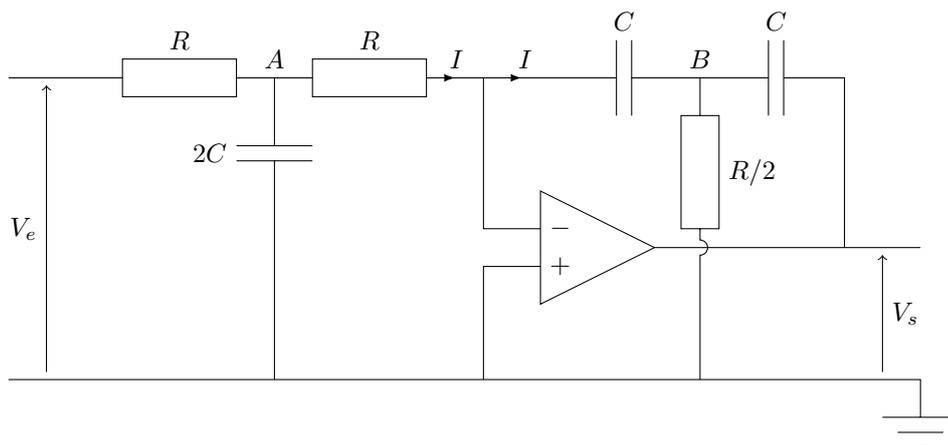
En ce qui concerne la sortie [Fourier/Sortie/Reconstruction], on peut constater que 10 harmoniques suffisent pour reconstruire le signal triangulaire.

L'étudiant peut fournir deux explications. L'examineur appréciera d'avoir les deux !

Une première est qualitative : les ruptures de pente d'un signal rectangulaire sont beaucoup plus abruptes que les ruptures de pente d'un signal triangulaire et donc il faut des harmoniques de fréquences élevées pour les reproduire.

La deuxième est mathématique : les coefficients des harmoniques décroissent en  $1/n$  pour le signal rectangulaire et en  $1/n^2$  pour le signal triangulaire. Dans la reconstitution les harmoniques de haute fréquence ont donc un poids beaucoup plus faible pour un signal triangulaire que pour un signal rectangulaire.

3. On peut mener le calcul en appliquant le théorème de Millman en différents points du circuit mais on peut aussi remarquer que la borne « - » de l'amplificateur opérationnel est virtuellement reliée à la masse.



On calcule alors

$$Z_A = \frac{R}{1 + 2jRC\omega}$$

impédance donnée par la résistance  $R$  en parallèle sur la capacité  $2C$ , ainsi que

$$Z_B = \frac{R}{2 + jRC\omega}$$

impédance donnée par la résistance  $R/2$  en parallèle sur la capacité  $C$ .

On peut ainsi écrire  $V_A = \frac{Z_A V_e}{Z_A + R}$  et  $I = \frac{V_A}{R}$  ainsi que  $V_B = \frac{Z_B V_s}{Z_B + \frac{1}{jC\omega}}$  et  $I = -V_B jC\omega$

ce qui conduit à

$$\frac{\frac{1}{R} \frac{R V_e}{1 + 2jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + 2jRC\omega}} = \frac{\frac{-R jC\omega V_s}{2 + jRC\omega}}{\frac{R}{2 + jRC\omega} + \frac{1}{jC\omega}}$$

Après simplification on obtient

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{1}{(jRC\omega)^2}$$

sous forme complexe, ou bien

$$V_s = -\frac{1}{(RC)^2} \iint V_e dt$$

sous forme intégrale.

Le circuit est donc un double intégrateur et, si la tension d'entrée est un signal créneau symétrique, la tension de sortie est composée d'arcs de paraboles. On peut calculer simplement la décomposition en série de Fourier en intégrant le résultat de la question 2, ce qui conduit à

$$V_s(t) = \sum_0^{\infty} \frac{ET^2}{(RC)^2((2p+1)\pi)^3} \sin((2p+1)\omega t)$$

4. Les questions suivantes ne sont pas incluses dans l'énoncé mais l'examinateur peut éventuellement les poser, d'autant que le logiciel annonce que le montage est instable.

*Stabilité du montage ?*

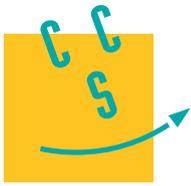
Le montage est instable puisque comme pour la question 2 si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $V_s \rightarrow +\infty$

*Que se passe-t-il si on relie la sortie à l'entrée ?*

À cause de l'instabilité on obtient un oscillateur de période  $T = 2\pi RC$ .

Utiliser AnHarm pour charger le fichier `i31019b.fct` et tracer le diagramme de Bode en gain malgré l'instabilité. On obtient une pente constante de  $-40$  dB/décade qui est caractéristique d'une double intégration. Le tracé des signaux montre que le signal de sortie est proche d'une sinusoïde : ce n'en est pas une ! Les examinateurs seraient reconnaissants aux candidats de ne plus asséner une telle réponse : l'intégrale double d'un signal rectangulaire N'EST PAS une sinusoïde !

L'utilisation du menu Fourier montre cependant que le signal obtenu est proche d'une sinusoïde puisque deux harmoniques (la 1 et la 3, la deux n'existant pas) suffisent pour reconstituer le signal de sortie. La raison est que les coefficients de Fourier sont en  $1/n^3$  et donc tendent vers 0 très rapidement.



Soit un système composé de deux objets ponctuels  $M_1$  et  $M_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement, isolés dans l'espace et s'attirant mutuellement.

1. Montrer que dans un référentiel galiléen convenablement choisi le mouvement de chaque point peut se déduire du mouvement d'un point unique  $M$  de masse  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

Montrer que le mouvement est plan.

2. Les deux objets sont reliés par un ressort sans masse linéaire de raideur  $k$  de longueur à vide  $r_0$ . La position de  $M$  dans le plan de sa trajectoire sera repérée en coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .
  - a. Montrer que  $r^2 \dot{\theta} = C$  où  $C$  est une constante,  $\dot{\theta}$  désignant la dérivée première de  $\theta$  par rapport au temps.
  - b. Exprimer l'énergie mécanique barycentrique du système en fonction de  $r$  et de  $C$ . On pourra poser  $\omega_0^2 = k/m$
3. À l'instant initial on lance le système à partir de la position  $r = r_0$  et  $\theta = 0$  avec pour conditions  $\dot{\theta} = \omega$  et  $\dot{r} = 0$ . On pose  $u = r/r_0$  et  $\alpha = \omega/\omega_0$ .

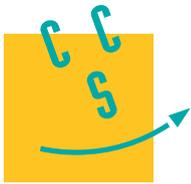
Exprimer  $\dot{u}$ , dérivée de  $u$  par rapport au temps, en fonction de  $u$ ,  $\alpha$  et  $\omega_0$

Écrire l'énergie mécanique sous la forme  $F(u)\dot{u}^2 + G(u) = 0$ . Par une méthode graphique montrer que  $u$  oscille entre deux valeurs extrêmes dont on donnera une des bornes.

4. *Étude informatique.* Le logiciel Equadif et le fichier `i41018.eqd` sont à votre disposition. Ils vous permettent de tracer  $u(t)$  (noté  $r(t)$ ) et la trajectoire vue du dessus ( $y(x)$ ). On pourra tracer ces courbes pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Interpréter le plus complètement possible les tracés obtenus.

Que constatez vous lorsque  $\alpha$  tend vers 0 ? Ne peut-on pas le démontrer simplement par le calcul ? Peut on vraiment atteindre une trajectoire parfaitement circulaire comme dans le cas de mouvements avec une force en  $1/r^2$  ?

Dans le logiciel on a pris  $\omega_0 = 1$  et  $r_0 = 1$ .



## Corrigé

1. Cette question est quasi une question de cours. L'examinateur attend donc qu'elle soit traitée clairement et rapidement.

$O$  étant un point quelconque pris comme origine, on peut écrire :

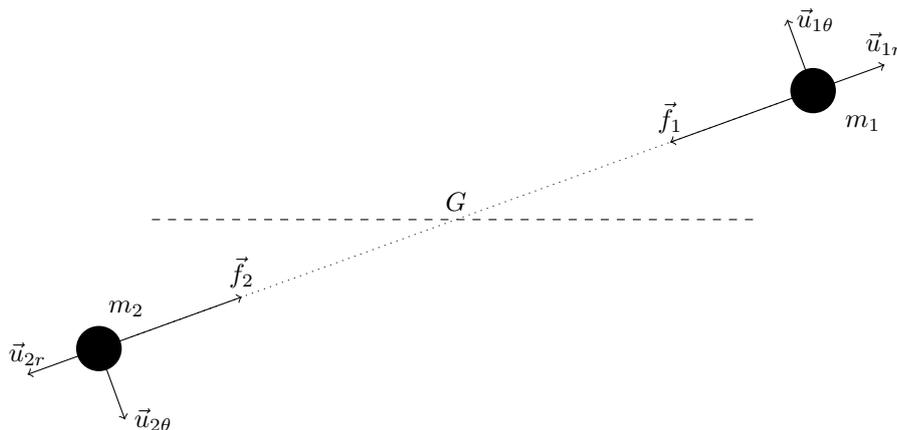
$$\vec{f}_1 = m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_1}{dt^2} \quad \text{et} \quad \vec{f}_2 = m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_2}{dt^2}$$

D'autre part

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{OM}_1}{dt^2} = \frac{\vec{f}_2}{m_2} - \frac{\vec{f}_1}{m_1}$$

avec  $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$ .

Si on pose  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  et  $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ , il vient  $\vec{f}_2 = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ .



On peut choisir comme origine du repère le centre de gravité  $G$  des deux masses qui est donné par la relation :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

ce qui conduit à  $m_1 r_1 = m_2 r_2$  si on pose  $r_1 = \|\overrightarrow{GM_1}\|$  et  $r_2 = \|\overrightarrow{GM_2}\|$ .

De plus  $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$  c'est à dire que  $\frac{m_1}{m} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}$ , soit, finalement :  $m_1 r_1 = m_2 r_2 = m r$ .

Les trajectoires sont homothétiques par rapport à  $G$ . Les mouvements de chaque point peuvent se déduire du mouvement d'un point unique de masse  $m$  sur une trajectoire de rayon  $r$ .

Pour montrer que la trajectoire est plane on peut calculer la dérivée du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} \left( \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \frac{d \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} \right)$$

qui donne un vecteur constamment nul. On a donc :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \frac{d\overrightarrow{M_1 M_2}}{dt} = \vec{C}$$

et  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  est toujours orthogonal à  $\vec{C}$ . La trajectoire est donc plane et s'effectue dans un plan constamment orthogonal à  $\vec{C}$ .

2.

a. Pour résoudre cette question il existe deux démonstrations.

- Soit le candidat continue avec le moment cinétique exprimé à la question précédente.

Le calcul du moment cinétique dans le référentiel barycentrique donne

$$\vec{\sigma}_G = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \vec{v}_i = \vec{C} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \vec{v}_i = \frac{dr_i}{dt} \vec{u}_{ir} + r_i \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{i\theta}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}_G = \left( m_1 r_1^2 \frac{d\theta}{dt} + m_2 r_2^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{z}$$

où  $\vec{z} = \vec{u}_{1r} \wedge \vec{u}_{1\theta} = \vec{u}_{2r} \wedge \vec{u}_{2\theta}$  est orthogonal au plan de la trajectoire.

Comme  $mr = m_1 r_1 = m_2 r_2$  il vient finalement  $\vec{\sigma}_G = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{z}$ , c'est-à-dire  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$  constante.

- Soit le candidat revient au calcul de la force. On a  $\overrightarrow{GM_i} = i \vec{u}_{ir}$  ce qui donne après une double dérivation par rapport au temps

$$\frac{d^2 \overrightarrow{GM_i}}{dt^2} = \left( \frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{ir} + \left( \frac{dr_i}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left( r_i \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \vec{u}_{i\theta}$$

En écrivant  $\vec{F} = m \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2}$  avec  $\vec{u}_{1r} = -\vec{u}_{2r}$ ,  $\vec{u}_{1\theta} = -\vec{u}_{2\theta}$  et  $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 G} + \overrightarrow{GM_2}$ , il vient

$$\vec{F} = m \left( \frac{d^2(r_1 + r_2)}{dt^2} - (r_1 + r_2) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{1r} + m \left( \frac{d(r_1 + r_2)}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left( (r_1 + r_2) \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \vec{u}_{1\theta}$$

Comme il n'y a pas de force suivant  $\vec{u}_{1\theta}$ , on obtient finalement  $\vec{F} = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{u}_{1r}$  et  $0 = \left( \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt} \left( r \frac{d\theta}{dt} \right) \right)$ , c'est-à-dire  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$  constante.

- b. L'énergie potentielle est essentiellement celle du ressort, c'est-à-dire  $E_p = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2$  et l'énergie totale s'écrit

$$E_T = \frac{1}{2} \left( m \dot{r}^2 + m r^2 \dot{\theta}^2 + k(r - r_0)^2 \right)$$

En tenant compte que  $C = r^2 \dot{\theta}$  et en posant  $\omega_0^2 = k/m$  il vient finalement

$$E_T = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} + \omega_0^2 (r - r_0)^2 \right)$$

3. Prenant en compte les conditions initiales on peut écrire  $C = r_0^2 \omega$  et  $E_T = \frac{1}{2} m r_0^2 \omega^2$ .

Soit en posant  $u = r/r_0$  et  $\alpha = \omega/\omega_0$  et après simplification

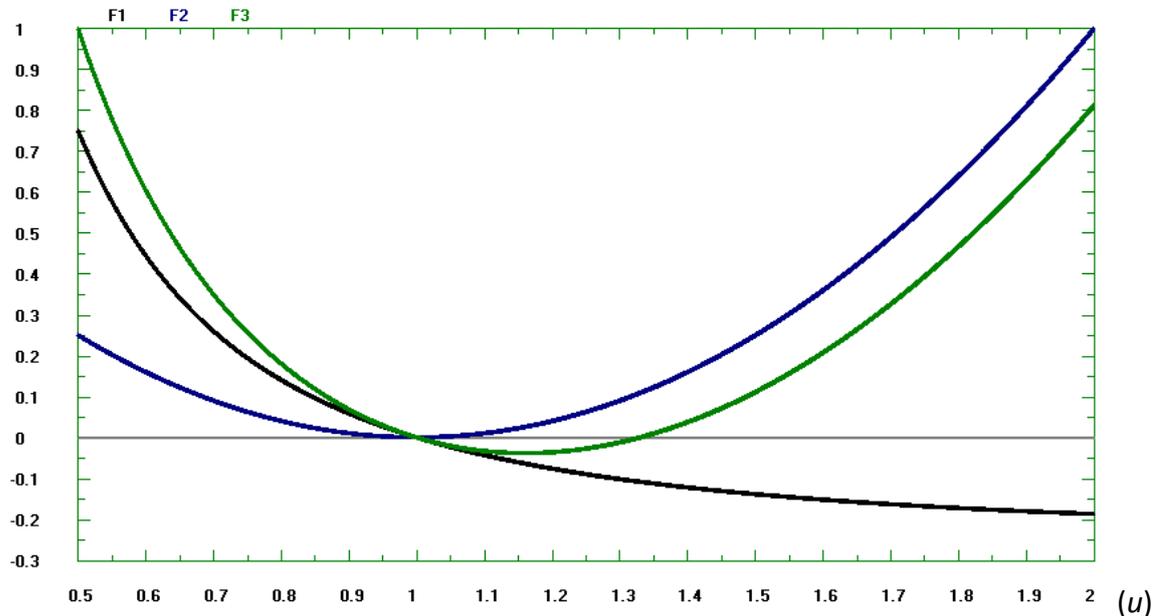
$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 \left( \alpha^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right) = 0$$

On a donc  $F(u) = 1$  et  $G(u) = \omega_0^2 \left( \alpha^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right)$ .

Pour montrer que  $u$ , et donc  $r$ , oscille entre deux valeurs on trace l'allure des fonctions  $F_1 = \alpha^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right)$  et  $F_2 = (u - 1)^2$  en fonction de  $u$ , ce qui permet d'obtenir l'allure de leur somme.

C'est ce qui est fait sur la figure ci-dessous avec la fonction  $F1$  en noir, la fonction  $F2$  en bleu et la fonction  $F3$  ( $G(u)$ ) en vert, respectivement. Pour ce tracé la valeur de  $\alpha$  a été fixé à  $\alpha = 0,5$ .

Pour cet exercice le candidat ne dispose pas du logiciel de tracé de courbe utilisé pour tracer la figure ci-dessus. L'examinateur attend de lui qu'il trace rapidement l'allure de chacun des termes de la fonction  $G(u)$  ainsi que leur somme pour arriver à la conclusion ci-dessous.



On constate que  $G(u)$  s'annule pour  $u = 1$  (solution évidente) et pour  $u = u' > 1$ , deux valeurs qui correspondent à l'annulation de la vitesse  $\dot{u} = 0$  et donc aux deux extrémités de la trajectoire. On peut donc prévoir que  $u$  varie entre deux valeurs extrêmes, 1 et  $u'$ , au cours du mouvement

4. Le logiciel Equadif, mis à la disposition du candidat, trace les variations au cours du temps de  $u(t)$  ainsi que la trajectoire vue de dessus.

Dans le logiciel on peut changer les valeurs de  $\alpha$  en jouant sur les conditions initiales. Une fois le fichier `i41018.eqd` chargé (Menu Fichier / ouvrir ou Ctrl-O), on peut tracer les courbes à l'aide de Ctrl-T et les effacer avec Ctrl-E. Les conditions initiales s'affichent à l'aide de Menu Equations / Conditions Initiales ou Ctrl-I. Changer la valeur de  $\theta_0$  cliquer sur OK puis sur Ctrl-T pour tracer les nouvelles courbes. À la question « Continuer le calcul ? » on pourra répondre OUI pour observer la trajectoire  $y(x)$  sur des temps plus importants.

On constate que  $u$  varie périodiquement entre deux valeurs limites, l'une d'entre elles étant la valeur à l'origine. La trajectoire montre en outre une rotation autour de l'origine. Il est possible de faire varier  $\alpha$  et on constate que la valeur maximale atteinte par  $u$  dépend directement des valeurs de  $\alpha$ .

L'interprétation passe par l'étude de  $G(u)$ . Cette fonction représente l'énergie potentielle effective du système.

Un des termes  $\alpha^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right)$  correspond à l'énergie potentielle de la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) tandis que l'autre  $(u - 1)^2$  correspond à l'énergie potentielle du ressort. À l'instant initial, le ressort n'étant ni tendu ni comprimé, seule la force d'inertie d'entraînement joue un rôle et les deux masses tendent à s'éloigner l'une de l'autre ainsi qu'à tourner autour de leur centre de gravité, la vitesse de rotation étant fixée par la valeur de  $\alpha$ . Le ressort exerce alors une force de rappel qui augmente avec la distance les séparant jusqu'à l'emporter sur la force d'inertie. Les deux masses se rapprochent alors jusqu'à atteindre à nouveau la distance initiale (conservation de l'énergie), instant à partir duquel le mouvement se répète d'où la périodicité. L'amplitude du mouvement dépend de la valeur de  $\alpha$  ce qui se constate aisément avec le logiciel, puisque la force d'inertie d'entraînement est proportionnelle à  $\alpha^2$ .

On peut noter que lorsque  $\alpha$  tend vers 0 l'amplitude des variations de  $u$  diminue. La trajectoire se rapproche alors d'une trajectoire circulaire de rayon  $r = r_0$ .

Si on reprend l'équation

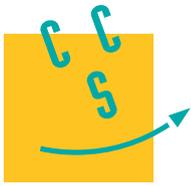
$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 \left( \alpha^2 \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) + (u - 1)^2 \right) = 0$$

dans laquelle on fait tendre  $\alpha$  vers 0, il reste alors

$$\dot{u}^2 + \omega_0^2 (u - 1)^2 = 0$$

qui admet pour solutions  $u = 1$  et  $\dot{u} = 0$ .

En conséquence la trajectoire tend bien vers un cercle de rayon  $r_0$ . Toutefois, il est clair que l'on ne peut pas atteindre une trajectoire parfaitement circulaire car si  $\alpha$  tend vers 0 cela signifie que le système est lancé avec une vitesse orthogonale nulle. En d'autres termes que le système reste parfaitement immobile !



Un œil accommodant à l'infini, observe des objets à l'infini à travers une lunette astronomique.

1. Décrire brièvement le montage correspondant à une lunette astronomique composée de l'association de deux lentilles minces convergentes. La lentille constituant l'objectif a une focale  $f_{\text{obj}}$  et la lentille constituant l'oculaire a une focale  $f_{\text{oc}}$ . Donner une expression du grossissement  $G$  et du grandissement  $\gamma$ ? Quelle relation relie ces deux grandeurs?
2. La lunette considérée ici est constituée par l'association d'une lentille convergente  $L_{\text{obj}}$  de distance focale image  $f'_{\text{obj}} = 9a$  et d'un oculaire constitué par deux lentilles minces convergentes séparées d'une distance  $e = 2a$  avec  $e = \overline{O_1O_2}$ , où  $O_1$  et  $O_2$  sont les centres des deux lentilles de distance focale image  $f'_1 = f'_2 = 3a$ .

Pour cet oculaire déterminer la position du foyer image de l'oculaire  $\overline{O_2F'}$  et du foyer objet  $\overline{O_1F}$ . Déterminer également la position des points conjugués  $H$  et  $H'$  pour lesquels le grandissement transversal vaut 1. Enfin, calculer les distances focales  $f' = \overline{H'F'}$  et  $f = \overline{HF}$ .

Comment faut-il placer cet oculaire pour que l'ensemble {Objectif+Oculaire} soit afocal et constitue donc une lunette astronomique?

On pourra s'aider du logiciel Optigeo, (fichier i11031.geo) pour tracer des rayons et répondre aux questions précédentes. Dans ce logiciel on a pris  $a = 0,5$ .

3. Le rayon  $R$  de la monture de l'objectif de la lunette complète est  $R = 2,5$  cm.

Si le faisceau qui atteint le système est parallèle et de rayon supérieur à  $R$ , quel sera le rayon du faisceau sortant? Si l'objet observé est vu sous un angle  $\alpha$  à l'œil nu, sous quel angle apparaît-il à travers l'appareil?

Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent où faut-il placer l'œil pour observer avec un maximum d'intensité?

## Corrigé

1. Il s'agit là d'une question de cours. L'examinateur attend donc des réponses rapides et claires accompagnées d'un tracé géométrique soutenant l'exposé.

Le système complet est afocal car on fait coïncider en un point le foyer image de l'objectif avec le foyer objet de l'oculaire. Un rayon parallèle à l'axe optique avant l'objectif passe par ce point et ressort parallèle à l'axe. Un rayon faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique avant l'objectif ressort en faisant un angle  $\alpha'$  avec l'axe.

L'application du théorème de Thalès à ces deux cas de figure donne

$$G = \frac{-f_{obj}}{f_{oc}} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{et donc} \quad G\gamma = 1$$

2. Les calculs d'optique géométrique peuvent être rapidement inextricables si ils ne sont pas menés de façon rigoureuse ou simplifiés au préalable par des raisonnements simples. L'examinateur attend donc du candidat qu'il adopte ces deux démarches pour aboutir au résultat final. La détermination des foyers image et objet du système peut être assez rapide en utilisant le raisonnement suivant. Le foyer image  $F'$  de l'oculaire est tel qu'un rayon parallèle à l'axe avant la première lentille ressort du système en passant par le foyer image du système. Ce rayon doit aussi passer par  $F'_1$ , foyer image de la première lentille. Par conséquent,  $F'$  et  $F'_1$  sont conjugués par la deuxième lentille. Il suffit donc d'écrire une seule relation de conjugaison, à savoir

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{f'_1 - e} = \frac{1}{f'_2}$$

ce qui donne, en remplaçant  $f' - 1$ ,  $f'_2$  et  $e$  par leurs expressions en fonction de  $a$

$$\overline{O_2F'} = \frac{3a}{4}$$

Compte tenu de la symétrie du système il n'est pas utile de mener un calcul pour déterminer la position du foyer objet  $F$ . Il suffit d'appliquer le retour inverse de la lumière et il vient

$$\overline{O_1F} = -\frac{3a}{4}$$

**Objectif Plan Focal Oculaire** La recherche des points  $H$  et  $H'$  est un peu plus complexe. Le point  $H$  donne un point intermédiaire  $H_1$  par la première lentille qui donne le point  $H'$  par la deuxième lentille. D'autre part le grandissement total est 1. Ceci amène trois équations avec beaucoup d'inconnues, les deux équations de conjugaison plus l'équation liée au grandissement, soit

$$-\frac{1}{\overline{O_1H}} + \frac{1}{\overline{O_1H_1}} = \frac{1}{f'_1} \quad -\frac{1}{\overline{O_2H_1}} + \frac{1}{\overline{O_2H'}} = \frac{1}{f'_2} \quad \frac{\overline{O_1H_1} \overline{O_2H'}}{\overline{O_1H} \overline{O_1H_1}} = 1$$

Pour simplifier les écritures et ramener le nombre d'inconnues à trois, on pose

$$x = \overline{O_1H} \quad y = \overline{O_1H_1} \quad z = \overline{O_2H'}$$

ce qui amène

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'_1} \quad -\frac{1}{y-e} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f'_2} \quad \frac{y}{x} \frac{z}{y-e} = 1$$

Soit

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{y}{f'_1} \quad \frac{y-e}{z} = 1 + \frac{y-e}{f'_2} \quad \frac{y}{x} = \frac{y-e}{z}$$

qui donne finalement

$$x = \frac{3a}{2} \quad y = \frac{e}{2} = a \quad \text{et} \quad z = -\frac{3a}{2}$$

De ces grandeurs on obtient la distance focale objet

$$\overline{HF} = \overline{HO_1} + \overline{O_1F} = -\frac{9a}{4}$$

et image (par retour inverse compte tenu de la symétrie du dispositif)

$$\overline{H'F'} = \frac{9a}{4}$$

Pour constituer une lunette astronomique il faut placer l'objectif à une distance telle que le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire.

Aide informatique

Le logiciel fourni [Optigeo] permet d'observer le trajet de rayons ou les positions respectives de l'objet et de l'image et de vérifier les résultats obtenus.

Au chargement [Fichier/Ouvrir puis choisir le fichier i11031.geo] le logiciel montre le trajet d'un faisceau parallèle à travers l'oculaire. On constate que les rayons convergent vers un point situé à  $\sim 1,39$  soit à  $0,39$  à droite de la deuxième lentille, ce qui correspond bien à

$$\overline{O_2F'} = \frac{3a}{4}.$$

La mesure de la position sur l'axe se fait en appuyant sur le bouton droit de la souris. Les coordonnées du curseur s'affichent en haut à gauche de l'écran. Pour vérifier que le foyer objet se trouve bien à

$$\overline{O_1F} = -\frac{3a}{4}$$

choisir [Système/Rayons/Divergents] puis cliquer sur 'Retour'. Déplacer la source lumineuse en cliquant dessus avec le bouton gauche de la souris et en le maintenant appuyé lors du déplacement. On constate que la position  $\approx -0,39$  conduit à un faisceau de sortie quasi parallèle.

Le logiciel permet également d'intuiter les positions des points  $H$  et  $H'$ . Il est possible d'afficher un objet et son image [Système/Objet puis cliquer sur retour]. En déplaçant l'objet [Cliquer dessus avec le bouton gauche et déplacer en maintenant le bouton appuyé] on peut trouver une position où le grandissement transversal est de 1. On peut alors constater une certaine symétrie entre la position de l'objet par rapport à la première lentille et celle de l'image par rapport à la deuxième lentille. Compte tenu de la symétrie du système on peut en déduire que l'image intermédiaire en  $H_1$  se forme nécessairement au milieu des deux lentilles. Ce qui donne  $\overline{O_1H_1} = -\overline{O_2H_1} = e/2$ , et les valeurs de  $\overline{O_1H}$  et  $\overline{O_2H'}$  à partir des relations de conjugaison.

En ce qui concerne la lunette complète, il est possible de la réaliser à partir du fichier i11031.geo en ajoutant une lentille puis en lui attribuant la bonne focale ( $9a = 4.5$ ) et la bonne position

$$(-4.88 = -9a - \frac{3a}{4}).$$

Ajouter une lentille en cliquant sur la fenêtre de rangement puis [Système/lentilles/focales et espacements variables] et modifier la position et la focale de la lentille ajoutée (Attention! c'est la n° 2 puisque la lentille ajoutée apparaît entre les deux lentilles de l'oculaire). La lunette complète est illustrée dans le fichier i11031a.geo.

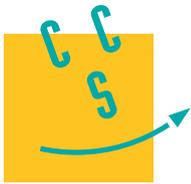
3. Il s'agit d'appliquer très simplement les résultats de la question 1 à un système plus compliqué que deux lentilles convergentes. Les définitions du grandissement et du grossissement restent bien évidemment les mêmes et on trouve

$$\gamma = \frac{-f'}{f'_{obj}} = -0.25 \quad \text{et} \quad G = -4$$

Par conséquent, un faisceau parallèle entrant avec un rayon de 2,5 cm ressortira avec un rayon de 0,625 cm et si un objet est vu avec un angle  $\alpha$  à l'œil nu il sera vu avec un angle  $-4\alpha$  à travers l'instrument.

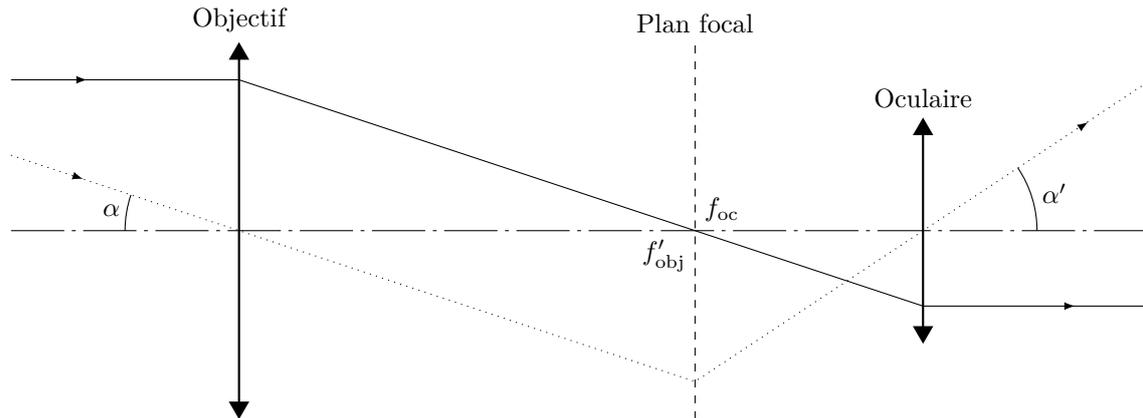
Le fichier i11031a.geo permet de vérifier que le diamètre du faisceau entrant est bien divisé par 4 en mesurant sa largeur à l'entrée et à la sortie de la lunette (Un click sur le bouton droit de la souris donne les coordonnées du curseur). Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent il faut placer l'œil à la position du cercle oculaire qui est l'image de l'objectif par l'oculaire. En effet, tous les rayons passant par l'objectif passent nécessairement par cette position qui est donc l'endroit où on collecte le plus de lumière.

Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent il faut placer l'œil à la position du cercle oculaire qui est l'image de l'objectif par l'oculaire. En effet, tous les rayons passant par l'objectif passent nécessairement par cette position qui est donc l'endroit où on collecte le plus de lumière.



## Corrigé

1. Il s'agit là d'une question de cours. L'examinateur attend donc des réponses rapides et claires accompagnées d'un tracé géométrique soutenant l'exposé.



Le système complet est afocal car on fait coïncider en un point le foyer image de l'objectif avec le foyer objet de l'oculaire. Un rayon parallèle à l'axe optique avant l'objectif passe par ce point et ressort parallèle à l'axe. Un rayon faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique avant l'objectif ressort en faisant un angle  $\alpha'$  avec l'axe.

L'application du théorème de Thalès à ces deux cas de figure donne

$$G = \frac{-f_{\text{obj}}}{f_{\text{oc}}} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{et donc} \quad G\gamma = 1$$

2. Les calculs d'optique géométrique peuvent être rapidement inextricables s'ils ne sont pas menés de façon rigoureuse ou simplifiés au préalable par des raisonnements simples. L'examinateur attend donc du candidat qu'il adopte ces deux démarches pour aboutir au résultat final.

La détermination des foyers image et objet du système peut être assez rapide en utilisant le raisonnement suivant. Le foyer image  $F'$  de l'oculaire est tel qu'un rayon parallèle à l'axe avant la première lentille ressort du système en passant par le foyer image du système. Ce rayon doit aussi passer par  $F'_1$ , foyer image de la première lentille. Par conséquent,  $F'$  et  $F'_1$  sont conjugués par la deuxième lentille. Il suffit donc d'écrire une seule relation de conjugaison, à savoir

$$\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{f'_1 - e} = \frac{1}{f_2}$$

ce qui donne, en remplaçant  $f'_1$ ,  $f_2$  et  $e$  par leurs expressions en fonction de  $a$

$$\overline{O_2F'} = \frac{3a}{4}$$

Compte tenu de la symétrie du système il n'est pas utile de mener un calcul pour déterminer la position du foyer objet  $F$ . Il suffit d'appliquer le retour inverse de la lumière et il vient

$$\overline{O_1F} = -\frac{3a}{4}$$

La recherche des points  $H$  et  $H'$  est un peu plus complexe. Le point  $H$  donne un point intermédiaire  $H_1$  par la première lentille qui donne le point  $H'$  par la deuxième lentille. D'autre part le grandissement total vaut 1.

Ceci amène trois équations avec beaucoup d'inconnues, les deux équations de conjugaison plus l'équation liée au grandissement, soit

$$\begin{cases} -\frac{1}{\overline{O_1H}} + \frac{1}{\overline{O_1H_1}} = \frac{1}{f'_1} \\ -\frac{1}{\overline{O_2H_1}} + \frac{1}{\overline{O_2H'}} = \frac{1}{f'_2} \\ \frac{\overline{O_1H_1} \overline{O_2H'}}{\overline{O_1H} \overline{O_1H_1}} = 1 \end{cases}$$

Pour simplifier les écritures et ramener le nombre d'inconnues à trois, on pose

$$x = \overline{O_1H} \quad y = \overline{O_1H_1} \quad z = \overline{O_2H'}$$

ce qui amène

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'_1} \quad -\frac{1}{y-e} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f'_2} \quad \frac{y}{x} \frac{z}{y-e} = 1$$

Soit

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{y}{f'_1} \quad \frac{y-e}{z} = 1 + \frac{y-e}{f'_2} \quad \frac{y}{x} = \frac{y-e}{z}$$

qui donne finalement

$$x = \frac{3a}{2} \quad y = \frac{e}{2} = a \quad z = -\frac{3a}{2}$$

De ces grandeurs on obtient la distance focale objet

$$\overline{HF} = \overline{HO_1} + \overline{O_1F} = -\frac{9a}{4}$$

et image (par retour inverse compte tenu de la symétrie du dispositif)

$$\overline{H'F'} = \frac{9a}{4}$$

Pour constituer une lunette astronomique il faut placer l'objectif à une distance telle que le foyer image de l'objectif coïncide avec le foyer objet de l'oculaire.

#### *Aide informatique*

Le logiciel fourni [Optigeo] permet d'observer le trajet de rayons ou les positions respectives de l'objet et de l'image et de vérifier les résultats obtenus.

Au chargement [Fichier/Ouvrir puis choisir le fichier `i11031.geo`] le logiciel montre le trajet d'un faisceau parallèle à travers l'oculaire. On constate que les rayons convergent vers un point situé à  $\sim 1,39$  soit à  $0,39$  à droite de la deuxième lentille, ce qui correspond bien à

$$\overline{O_2F'} = \frac{3a}{4}.$$

La mesure de la position sur l'axe se fait en appuyant sur le bouton droit de la souris. Les coordonnées du curseur s'affichent en haut à gauche de l'écran. Pour vérifier que le foyer objet se trouve bien à

$$\overline{O_1F} = -\frac{3a}{4}$$

choisir [Système/Rayons/Divergents] puis cliquer sur **Retour**. Déplacer la source lumineuse en cliquant dessus avec le bouton gauche de la souris et en maintenant appuyé lors du déplacement. On constate que la position  $\approx -0,39$  conduit à un faisceau de sortie quasi parallèle.

Le logiciel permet également d'intuiter les positions des points  $H$  et  $H'$ . Il est possible d'afficher un objet et son image [Système/Objet puis cliquer sur retour]. En déplaçant l'objet [Cliquer dessus avec le bouton gauche

et déplacer en maintenant le bouton appuyé] on peut trouver une position où le grandissement transversal est de 1. On peut alors constater une certaine symétrie entre la position de l'objet par rapport à la première lentille et celle de l'image par rapport à la deuxième lentille. Compte tenu de la symétrie du système on peut en déduire que l'image intermédiaire en  $H_1$  se forme nécessairement au milieu des deux lentilles. Ce qui donne  $\overline{O_1H_1} = -\overline{O_2H_1} = e/2$  et les valeurs de  $\overline{O_1H}$  et  $\overline{O_2H'}$  à partir des relations de conjugaison.

En ce qui concerne la lunette complète, il est possible de la réaliser à partir du fichier `i11031.geo` en ajoutant une lentille puis en lui attribuant la bonne focale ( $9a = 4,5$ ) et la bonne position ( $-4,88 = -9a - \frac{3}{4}a$ ).

Ajouter une lentille en cliquant sur la fenêtre de rangement puis [Système/lentilles/focales et espacements variables] et modifier la position et la focale de la lentille ajoutée (Attention ! c'est la n° 2 puisque la lentille ajoutée apparait entre les deux lentilles de l'oculaire). La lunette complète est illustrée dans le fichier `i11031a.geo`.

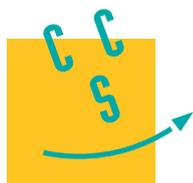
3. Il s'agit d'appliquer très simplement les résultats de la question 1 à un système plus compliqué que deux lentilles convergentes. Les définitions du grandissement et du grossissement restent bien évidemment les mêmes et on trouve

$$\gamma = \frac{-f'}{f'_{obj}} = -0.25 \quad \text{et} \quad G = -4$$

Par conséquent, un faisceau parallèle entrant avec un rayon de 2,5 cm ressortira avec un rayon de 0,625 cm et si un objet est vu avec un angle  $\alpha$  à l'œil nu il sera vu avec un angle  $-4\alpha$  à travers l'instrument.

Le fichier `i11031a.geo` permet de vérifier que le diamètre du faisceau entrant est bien divisé par 4 en mesurant sa largeur à l'entrée et à la sortie de la lunette (Un click sur le bouton droit de la souris donne les coordonnées du curseur).

Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent il faut placer l'œil à la position du cercle oculaire qui est l'image de l'objectif par l'oculaire. En effet, tous les rayons passant par l'objectif passent nécessairement par cette position qui est donc l'endroit où on collecte le plus de lumière.



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Travaux pratiques de chimie

Oral

PC

Avant l'épreuve, quelques explications sont données sur le déroulement du TP, sur le matériel et les consignes de sécurité.

Le compte-rendu doit être complet pour se suffire à lui-même : objectifs, description des expériences et conditions expérimentales non décrites dans l'énoncé, mesures brutes, observations, traitement des résultats (courbes), interprétation. Sa présentation doit être soignée. Une synthèse critique est attendue en guise de conclusion.

La durée de l'épreuve est de 3 heures, hors tirage au sort et contrôle d'identité.

L'épreuve comporte trois appels à l'examineur qui permettront d'engager un échange. Avant l'appel il est recommandé de préparer les questions qui doivent être exposées à l'oral. Il est inutile ensuite d'en reporter les réponses sur le compte-rendu.

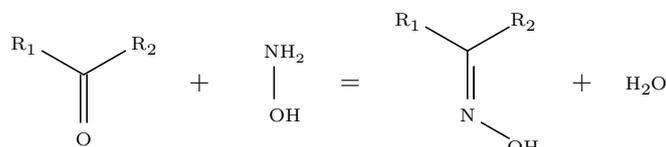
Aucune détermination d'incertitude n'est à fournir sauf si elle est demandée dans l'énoncé.

Le port d'une blouse, de lunettes de protection, de chaussures fermées est obligatoire durant les manipulations. Le port des gants est laissé à l'appréciation des candidats.

## 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de réaliser la synthèse de la cyclohexanone oxime et d'utiliser la réaction de synthèse d'une oxime pour déterminer la concentration d'une solution de propanone.

La réaction de l'hydroxylamine  $\text{NH}_2\text{OH}$  sur les dérivés carbonyles conduit à une oxime. L'équation de la réaction correspondante est



Le chlorure d'hydroxylammonium  $\text{NH}_3\text{OHCl}$ , choisi pour des raisons de stabilité chimique, peut également réagir d'une manière similaire pour produire une oxime. **La réaction est exothermique.**

Les oximes sont des intermédiaires de synthèse permettant notamment de préparer un nitrile à partir d'un aldéhyde ou un amide à partir d'une cétone à l'aide d'un réarrangement de Beckmann.

## 2 Préparation de la cyclohexanone oxime

La cyclohexanone oxime est un intermédiaire dans la synthèse du nylon 6. Le chauffage de la cyclohexanone oxime en catalyse acide conduit au caprolactame susceptible de se polymériser en nylon 6 avec  $\text{N}_2$  vers  $450^\circ\text{C}$ . Le nylon 6 est notamment utilisé pour fabriquer du fil chirurgical, des soies de brosse à dents ou des cordes de guitare.

On dispose des produits suivants :

- cyclohexanone ;
- chlorure d'hydroxylammonium ;
- ethanoate de sodium ;
- eau.

Envisager un mode opératoire permettant la synthèse de la cyclohexanone oxime en précisant le rôle de chaque composé et le montage à utiliser.

**Appeler l'examinateur**

Proposer à l'examinateur un protocole expérimental permettant de synthétiser la cyclohexanone oxime et préciser le rôle de chaque composé.

Réaliser la synthèse de façon à obtenir une masse théorique de 3 g de cyclohexanone oxime.

Récupérer le produit obtenu après **filtration sous vide** et rincer à l'eau glacée puis à l'heptane (< 10 mL). Sécher ensuite le produit recueilli dans un dessiccateur chauffant pendant au moins 30 minutes (demander de l'aide au technicien). Puis, déterminer la **température de fusion** du produit.

Justifier à l'écrit le choix de l'eau glacée et de l'heptane comme solvant de rinçage.

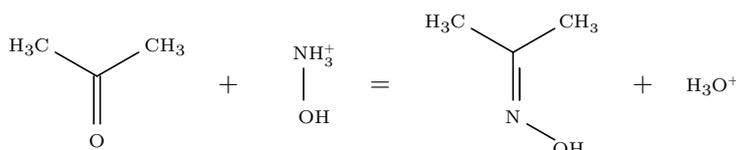
Déterminer le rendement de la réaction de synthèse de la cyclohexanone oxime en indiquant clairement les différentes étapes de calcul

Discuter de la pureté de votre produit.

### 3 Dosage d'une cétone

La réaction de formation de l'oxime, décrite dans la première partie, sera mise à profit pour doser une solution aqueuse de propanone.

L'équation de la réaction entre la propanone et le chlorure d'hydroxylammonium est



On considérera que les oximes ne présentent pas de propriétés acido-basiques dans les conditions de l'expérience. Prévoir l'allure de la courbe attendue pour le dosage de votre mélange en fin de réaction.

**Appeler l'examinateur**

Proposer à l'examinateur l'allure de la courbe de dosage attendue.

On dispose d'un pH-mètre avec une électrode en verre combinée, de chlorure d'hydroxylammonium en poudre et d'une solution aqueuse de soude dont le titre exact est **inconnu**. Introduire, dans un bécher, une quantité précise de chlorure d'hydroxylammonium (de l'ordre de 0,350 g). Ajouter 20 mL de la solution aqueuse de propanone. Agiter pendant 15 minutes.

Effectuer le dosage pH-métrique du mélange avec la solution de soude fournie.

Annotez et interprétez votre courbe en considérant que les oximes n'ont pas de propriétés acido-basiques.

**Appeler l'examinateur**

Proposer à l'examinateur l'interprétation de la courbe de titrage. La courbe est-elle en accord avec le modèle proposé précédemment ?

Estimer l'incertitude sur le volume de solution aqueuse de propanone prélevé.

Déterminer les concentrations exactes des solutions aqueuses fournies de propanone et de soude.

### 4 Rapport

Répondre d'une façon concise et précise aux différentes questions posées. La qualité du rapport est prise en considération.

Une synthèse critique est attendue en guise de conclusion.

## 5 Annexe

NH<sub>3</sub>OHCl

Masse molaire : 69,5 g · mol<sup>-1</sup>  
pK<sub>a</sub>(NH<sub>3</sub>OH<sup>+</sup>/NH<sub>2</sub>OH) = 6,0

Cyclohexanone

Masse molaire : 98,1 g · mol<sup>-1</sup>  
Masse volumique (25°C) : 0,94 kg · L<sup>-1</sup>

Cyclohexanone oxime

Masse molaire : 113 g · mol<sup>-1</sup>  
Température de fusion : 89°C

Avant l'épreuve, quelques explications sont données sur le déroulement du TP, sur le matériel et les consignes de sécurité.

Le compte-rendu doit être complet pour se suffire à lui-même : objectifs, description des expériences et conditions expérimentales non décrites dans l'énoncé, mesures brutes, observations, traitement des résultats (courbes), interprétation. Sa présentation doit être soignée. Une synthèse critique est attendue en guise de conclusion.

La durée de l'épreuve est de 3 heures, hors tirage au sort et contrôle d'identité.

L'épreuve comporte trois appels à l'examinateur qui permettront d'engager un échange. Avant l'appel il est recommandé de préparer les questions qui doivent être exposées à l'oral. Il est inutile ensuite d'en reporter les réponses sur le compte-rendu.

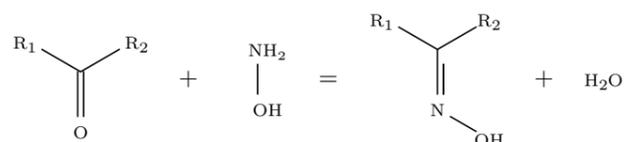
Aucune détermination d'incertitude n'est à fournir sauf si elle est demandée dans l'énoncé.

Le port d'une blouse, de lunettes de protection, de chaussures fermées est obligatoire durant les manipulations. Le port des gants est laissé à l'appréciation des candidats.

### 1 Introduction

L'objectif de ce travail est de réaliser la synthèse de la cyclohexanone oxime et d'utiliser la réaction de synthèse d'une oxime pour déterminer la concentration d'une solution de propanone.

La réaction de l'hydroxylamine  $\text{NH}_2\text{OH}$  sur les dérivés carbonyles conduit à une oxime. L'équation de la réaction correspondante est



Le chlorure d'hydroxylammonium  $\text{NH}_3\text{OHCl}$ , choisi pour des raisons de stabilité chimique, peut également réagir d'une manière similaire pour produire une oxime. **La réaction est exothermique.**

Les oximes sont des intermédiaires de synthèse permettant notamment de préparer un nitrile à partir d'un aldéhyde ou un amide à partir d'une cétone à l'aide d'un réarrangement de Beckmann.

### 2 Préparation de la cyclohexanone oxime

La cyclohexanone oxime est un intermédiaire dans la synthèse du nylon 6. Le chauffage de la cyclohexanone oxime en catalyse acide conduit au caprolactame susceptible de se polymériser en nylon 6 avec  $\text{N}_2$  vers  $450^\circ\text{C}$ . Le nylon 6 est notamment utilisé pour fabriquer du fil chirurgical, des soies de brosse à dents ou des cordes de guitare.

On dispose des produits suivants :

- cyclohexanone ;
- chlorure d'hydroxylammonium ;
- ethanoate de sodium ;
- eau.

*Savoir écouter, assimiler* : s'appropriier le matériel mis à disposition et assimiler les consignes.

*Rendre compte de façon écrite.*

*Rendre compte de façon orale.*

*Savoir écouter, assimiler.*

Envisager un mode opératoire permettant la synthèse de la cyclohexanone oxime en précisant le rôle de chaque composé et le montage à utiliser.

**Appeler l'examineur**

Proposer à l'examineur un protocole expérimental permettant de synthétiser la cyclohexanone oxime et préciser le rôle de chaque composé.

Réaliser la synthèse de façon à obtenir une masse théorique de 3 g de cyclohexanone oxime.

Récupérer le produit obtenu après **filtration sous vide** et rincer à l'eau glacée puis à l'heptane (< 10 mL). Sécher ensuite le produit recueilli dans un dessiccateur chauffant pendant au moins 30 minutes (demander de l'aide au technicien). Puis, déterminer la **température de fusion** du produit.

Justifier à l'écrit le choix de l'eau glacée et de l'heptane comme solvant de rinçage.

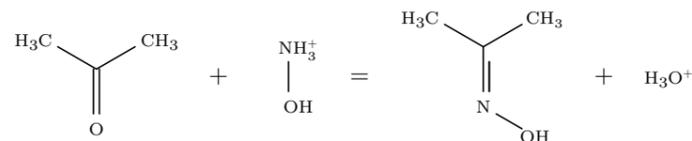
Déterminer le rendement de la réaction de synthèse de la cyclohexanone oxime en indiquant clairement les différentes étapes de calcul

Discuter de la pureté de votre produit.

### 3 Dosage d'une cétone

La réaction de formation de l'oxime, décrite dans la première partie, sera mise à profit pour doser une solution aqueuse de propanone.

L'équation de la réaction entre la propanone et le chlorure d'hydroxylammonium est



On considérera que les oximes ne présentent pas de propriétés acido-basiques dans les conditions de l'expérience. Prévoir l'allure de la courbe attendue pour le dosage de votre mélange en fin de réaction.

**Appeler l'examineur**

Proposer à l'examineur l'allure de la courbe de dosage attendue.

On dispose d'un pH-mètre avec une électrode en verre combinée, de chlorure d'hydroxylammonium en poudre et d'une solution aqueuse de soude dont le titre exact est **inconnu**. Introduire, dans un bécher, une quantité précise de chlorure d'hydroxylammonium (de l'ordre de 0,350 g). Ajouter 20 mL de la solution aqueuse de propanone. Agiter pendant 15 minutes.

Effectuer le dosage pH-métrique du mélange avec la solution de soude fournie.

Annotez et interprétez votre courbe en considérant que les oximes n'ont pas de propriétés acido-basiques.

*Proposer ou justifier un protocole, identifier les paramètres pertinents*

*Rendre compte de façon orale. Écouter, assimiler* : assimiler les conditions imposées par l'examineur  $n(\text{NH}_3\text{OHCl}) = 1,4 n(\text{cyclohexanone})$ ,  $n(\text{NaCH}_3\text{CO}_2) = 1,4 n(\text{NH}_3\text{OHCl})$ , 20 mL d'eau (solvant), léger chauffage (40 à 50°C).

*Réaliser le montage et le dispositif correspondant au protocole. Mettre en œuvre le dispositif expérimental conformément au protocole. Observer et décrire les phénomènes* : reporter sur le compte-rendu la formation d'un solide.

*Réaliser le montage et le dispositif correspondant au protocole* : montage d'un filtre büchner associé à une pompe à vide. *Mettre en œuvre le dispositif expérimental conformément au protocole. Définir les conditions d'utilisation des instruments de mesure, réaliser et régler les dispositifs expérimentaux dans les conditions de précision correspondant au protocole* : étalonner le banc Koffler.

*Proposer ou justifier un protocole, analyser les paramètres déterminants.*

*Élaborer, choisir et utiliser un modèle adapté. Confronter un modèle à des résultats expérimentaux* : commenter la valeur du rendement.

*Confronter un modèle à des résultats expérimentaux* : comparer la température de fusion obtenue avec celle de la littérature. *Analyser l'ensemble des résultats de façon critique et faire des propositions pour améliorer la démarche ou le modèle* : compte tenu de la pureté, proposer d'effectuer une éventuelle recristallisation du solide.

*Élaborer, choisir et utiliser un modèle adapté* : prévoir que la propanone, destinée à être dosée, doit être le réactif en défaut et en déduire l'allure de la courbe de titrage associée. *Rendre compte de façon orale.*

*Mettre en œuvre le dispositif expérimental conformément au protocole* : cette expérience étant un dosage, reporter la masse exacte de chlorure d'hydroxylammonium pesée et prélever les 20 mL de solution de propanone à la pipette jaugée.

*Définir les conditions d'utilisation des instruments de mesure, réaliser et régler les dispositifs expérimentaux dans les conditions de précision correspondant au protocole* : étalonner le pH-mètre à l'aide de tampons et d'une notice ou vérifier l'étalonnage ou demander au technicien si le pH-mètre est étalonné ; modifier l'incrément de volume lors du titrage en fonction de la variation du pH pour déterminer précisément les volumes équivalents. *Rendre compte de façon écrite* : tracer la courbe de titrage.

*Extraire des informations des données expérimentales et les représenter* : volumes équivalents, pH à la deuxième demi-équivalence. *Élaborer, choisir et utiliser un modèle adapté.*

### Appeler l'examineur

Proposer à l'examineur l'interprétation de la courbe de titrage. La courbe est-elle en accord avec le modèle proposé précédemment ?

Estimer l'incertitude sur le volume de solution aqueuse de propanone prélevé.

Déterminer les concentrations exactes des solutions aqueuses fournies de propanone et de soude.

## 4 Rapport

Répondre d'une façon concise et précise aux différentes questions posées. La qualité du rapport est prise en considération.

Une synthèse critique est attendue en guise de conclusion.

## 5 Annexe

NH <sub>3</sub> OHCl	Masse molaire : 69,5 g · mol <sup>-1</sup> pK <sub>a</sub> (NH <sub>3</sub> OH <sup>+</sup> /NH <sub>2</sub> OH) = 6,0
Cyclohexanone	Masse molaire : 98,1 g · mol <sup>-1</sup> Masse volumique (25°C) : 0,94 kg · L <sup>-1</sup>
Cyclohexanone oxime	Masse molaire : 113 g · mol <sup>-1</sup> Température de fusion : 89°C

*Confronter un modèle à des résultats expérimentaux. Rendre compte de façon orale.*

*Estimer l'incertitude d'une mesure ou d'une série de mesure : reporter l'incertitude inscrite sur la pipette jaugée utilisée.*

*Élaborer, choisir et utiliser un modèle adapté.*

*Rendre compte de façon écrite.*

*Analyser l'ensemble des résultats de façon critique et faire des propositions pour améliorer la démarche ou le modèle.*