Mathématiques 1

Oral

PC

Exercice 1

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ un cercle et une droite disjoints. Déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents à la fois à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose que λ est une valeur propre non réelle de A et que $Z \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre associé.

On note X et Y les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont respectivement les parties réelles et imaginaires des composantes de Z.

1. Montrer que X et Y sont non colinéaires.

2. Montrer que $\operatorname{vect}(X, Y)$ est stable par f.

3. On suppose que la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer tous les plans stables par f.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Oral

Mathématiques 1

PC

Exercice 1

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 2$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de E dont l'image et le noyau ne sont pas supplémentaires.

2. On suppose, dans cette question seulement, que f est un endomorphisme de E diagonalisable. Justifier que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.

3. Soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$\operatorname{Im}\left(f^k\right)\oplus\operatorname{Ker}\left(f^k\right)=E$$

   L'endomorphisme f^k est-il nécessairement diagonalisable ?

4. Le résultat démontré en 3 reste-t-il valable si l'espace E est de dimension infinie ?

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans la base canonique de

   – la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;

   – la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.

2. Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Soit r une rotation d'axe orienté $\mathrm{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\mathrm{Vect}(a) \times \mathrm{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.

   a. Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.

   b. Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

   (On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)

   c. En déduire que $r(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, a\rangle a + \cos\theta\, x + \sin\theta(a \wedge x)$.

4. En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.

5. Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = B(t)X(0)$.

   b. Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.

Exercice 1

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note

$$u_{n,p} = \frac{1}{p^n}\left(\sum_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{1/n}\right)^n$$

Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$.

Exercice 2

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On note E l'ensemble de fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit l'application Φ de E dans $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall f \in E, \quad \Phi(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

Déterminer (s'ils existent) les réels $m = \inf\limits_{f\in E} \Phi(f)$ et $M = \sup\limits_{f\in E} \Phi(f)$.

Précisez éventuellement pour quelles fonctions ces valeurs sont atteintes.

Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x+y-2z-1=0$. Déterminer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à P, notée $d(M,P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1,1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P. Sont-ils parallèles ?

   Calculer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à D, notée $d(M,D)$.

3. On définit

$$\Sigma=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad d(M,D)^2+d(M,P)^2=5\}$$

   Déterminer une équation cartésienne de Σ.

   Représenter simultanément Σ, D et P à l'écran.

   Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ.

1. Soit $(t,x) \mapsto h(t,x)$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$H(x) = \int_0^x h(t,x)\,\mathrm{d}t$$

En utilisant le logiciel informatique exprimer la dérivée $H'(x)$ à l'aide de l'application h.

On admettra provisoirement que $H'(x)$ existe pour tout x réel ainsi que la formule trouvée.

2. On veut déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1 qui vérifient le système d'équations suivant :

$$(S)\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + 8\displaystyle\int_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t = 9 \end{cases}$$

   a. Montrer qu'une application f de classe C^1 et qui vérifie le système d'équations (S) est forcément de classe C^∞.

   b. Montrer qu'il existe des fonctions f_1, f_2, f_3 à déterminer explicitement et des constantes A, B, F telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait nécessairement

$$f(x) = Af_1(x) + Bf_2(x) + f_3(x) + F$$

   c. Déterminer toutes les solutions du problème considéré.

3. Démontrer le résultat trouvé à la première question.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 10 & 3 & -11 \\ 314 & -126 & -39 & 139 \\ -426 & 174 & 56 & -187 \\ 225 & -92 & -29 & 100 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme canoniquement associé de $\mathbb{R}^4$.

Avant toute chose, afin de corriger une éventuelle faute de frappe, vérifier que $u(1,2,3,4) = (-38, 501, -658, 354)$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique P de u, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

2. On pose $v_1 = (-8, 103, -139, 73)$, $v_2 = u(v_1)$ et $v_3 = u(v_2)$.

   a. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. Montrer que F est un plan stable par u dont $B = (v_1, v_2)$ est une base.

   c. Déterminer la matrice C dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_F de u_F, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_F et P.

3. On pose $w_1 = (2, -13, 17, -9)$, $w_2 = u(w_1)$, $w_3 = u(w_2)$ et $w_4 = u(w_3)$.

   a. Montrer que (w_1, w_2, w_3, w_4) est liée et déterminer une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs.

   b. On pose $G = \mathrm{Vect}(w_1, w_2, w_3)$. Montrer que G est stable par u et que $B' = (w_1, w_2, w_3)$ en est une base.

   c. Déterminer la matrice C' dans la base B' de l'endomorphisme u_G induit par u sur G.

   d. Déterminer le polynôme caractéristique P_G de u_G, ainsi que ses valeurs propres et espaces propres. Que dire de sa diagonalisabilité ?

   e. Comparer P_G et P.

4. Peut-on trouver un plan de $\mathbb{R}^4$ stable par u sur lequel le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit est $(X-2)^2$?

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans la base canonique de

   – la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$;

   – la réflexion par rapport au plan $F : x + 2y + z = 0$.

2. Déterminer des réels α, a, b, c et d tels que $A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & a & c \\ -1 & b & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation.

   En préciser les éléments caractéristiques.

3. Soit r une rotation d'axe orienté $\mathrm{Vect}(a)$ avec $\|a\| = 1$ et d'angle θ et soit $x \in E$. On note (u, v) l'unique couple de $\mathrm{Vect}(a) \times \mathrm{Vect}(a)^\perp$ tel que $x = u + v$.

   a. Préciser (u, v) en fonction de x puis déterminer $r(u)$.

   b. Déterminer une expression simple de $r(v)$ en fonction de v et $a \wedge v$.

   (On pourra remarquer que $(a, v, a \wedge v)$ est une famille orthogonale.)

   c. En déduire que $r(x) = (1 - \cos\theta)\langle x, a\rangle a + \cos\theta\, x + \sin\theta(a \wedge x)$.

4. En utilisant le résultat précédent, retrouver la matrice de la rotation d'axe $\vec{\imath} + \vec{k}$ d'angle $\pi/4$.

5. Soit le système différentiel $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer qu'il existe une application $t \mapsto B(t)$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on déterminera telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = B(t)X(0)$.

   b. Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à $B(t)$ pour t réel fixé.

On pose pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $f_N(x) = \sqrt{1-x}\sum_{n=1}^{N} x^{n^2}$.

1. Vérifier que f est correctement définie.

2. Représenter simultanément les fonctions f_N pour $N \in \{1, 2, ..., 10\}$.

   Quelle conjecture peut-on en déduire ?

3. Calculer les valeurs approchées des maximums des fonctions f_N pour $N \in \{2, 4, ..., 40\}$.

   On justifiera la monotonie de cette suite.

4. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Donner la valeur de $A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

5. Soit g une fonction développable en série entière de rayon égal à 1.

   On note $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$. On note $C_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$.

   Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$.

   On note $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Quelle est la valeur de $B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$?

6. Calculer la limite $\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{B_N}$.

   La comparer aux valeurs trouvées à la **question 3**.

7. Montrer la conjecture de la **question 2**.

Dans cet exercice, on se place dans l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $x+y-2z-1=0$. Déterminer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à P, notée $d(M,P)$.

2. Soit D la droite passant par le point $A(1,1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Représenter simultanément à l'écran la droite D et le plan P. Sont-ils parallèles ?

   Calculer la distance d'un point $M(x,y,z)$ à D, notée $d(M,D)$.

3. On définit
$$\Sigma = \{M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad d(M,D)^2 + d(M,P)^2 = 5\}$$

   Déterminer une équation cartésienne de Σ.

   Représenter simultanément Σ, D et P à l'écran.

   Que peut-on conjecturer quant à la nature de Σ ?

4. Réduire l'équation cartésienne obtenue pour Σ dans un repère orthonormal approprié et en déduire sa nature.

5. Calculer le volume du domaine intérieur à Σ.