# Formulaire de mathématiques

MP, PC, PSI, PT, BCPST 2 - Concours Scientifiques

**Formulaire Maths Spé**

Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques de deuxième année.

**Point méthode**

**Utiliser le formulaire.**

Ce formulaire est un outil pour vous permettre de réviser vos définitions, vos formules, ainsi que les théorèmes que vous aurez à utiliser de façon appropriée le jour du concours. Leur connaissance doit orienter l'apprentissage du cours et doit vous permettre d'identifier les points essentiels, sur lesquels vous serez particulièrement attendus. Nous vous conseillons donc de l'utiliser pour préparer vos colles ou en support, si nécessaire, lorsque vous travaillez sur des exercices, ce tout au long de l'année. Bon travail à tous.

# Groupes-Anneaux-Corps

**Relation de congruence dans $\mathbb{Z}$.**

— Les sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$ sont exactement les sous-ensembles $n\mathbb{Z} = \{nk,\ k \in \mathbb{Z}\}$, où $n \in \mathbb{N}$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$, deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont **congrus modulo** $n$ si, et seulement si, $a - b \in n\mathbb{Z}$. On note alors $a \equiv b$ modulo $n$.
— La condition précédente est équivalente à $a$ et $b$ ont le même reste dans la division euclidienne par $n$.
— Si $a \equiv b$ modulo $n$ et $a' \equiv b'$ modulo $n$ alors $a + a' \equiv b + b'$ modulo $n$ et $aa' \equiv bb'$ modulo $n$.

**Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ et anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times)$.**

— La relation de congruence modulo $n$ est une **relation d'équivalence**.
— La **classe d'équivalence** d'un entier $k$ est définie par : $\mathrm{cl}(k) = \{l \in \mathbb{Z}, k \equiv l \text{ modulo } n\}$. On peut alors définir l'ensemble des classes d'équivalence modulo $n$, noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathrm{cl}(0), \mathrm{cl}(1), ..., \mathrm{cl}(n-1)\}$.
— L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un **groupe commutatif** pour la loi $+$ définie par $\mathrm{cl}(k) + \mathrm{cl}(k') = \mathrm{cl}(k + k')$.
— L'application $\pi : k \mapsto \mathrm{cl}(k)$ est un **morphisme surjectif** de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$, appelé **surjection canonique**.
— L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un **anneau commutatif** pour la loi $+$ définie par $\mathrm{cl}(a) + \mathrm{cl}(a') = \mathrm{cl}(a + a')$ et la loi $\times$ définie par $\mathrm{cl}(a) \times \mathrm{cl}(a') = \mathrm{cl}(aa')$.

**Sous-groupes engendrés par un élément.**

— Étant donnés un groupe $G$ et $a \in G$, l'application $\varphi : k \mapsto ka$ (en notation additive) ou $k \mapsto a^k$ (en notation multiplicative) allant de $\mathbb{Z}$ dans $G$ est un morphisme de groupe.
— L'ensemble $\mathrm{Im}(\varphi) = \{ka, k \in \mathbb{Z}\}$ (en notation additive) ou $\mathrm{Im}(\varphi) = \{a^k, k \in \mathbb{Z}\}$ (en notation multiplicative) est le **sous-groupe engendré par** $a$. On le note aussi $\langle a \rangle$.
— Il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = n\mathbb{Z}$. Cet entier $n$ est appelé **ordre** de l'élément $a$.
— Si $n = 0$, alors $\langle a \rangle$ est infini et isomorphe à $\mathbb{Z}$. Sinon, $\langle a \rangle$ est cyclique, contient $n$ éléments et est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Les générateurs du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ sont les classes d'équivalence $\mathrm{cl}(k)$, où $k \in \mathbb{Z}$ est premier avec $n$.

**Morphismes d'anneaux.** Soit $(A,+,\times)$ et $(B,+,\times)$ deux anneaux.

— $\varphi : A \to B$ est un **morphisme d'anneau** si : $\forall (a,a') \in A^2, \varphi(a+a') = \varphi(a) + \varphi(a')$ et $\varphi(a \times a') = \varphi(a) \times \varphi(a')$.
  - Si $A = B$ : $\varphi$ est un **endomorphisme** d'anneau.
  - Si $\varphi$ est bijective : $\varphi$ est un **isomorphisme** d'anneau.
  - Si $A = B$ et $\varphi$ est bijective : $\varphi$ est un **automorphisme** d'anneau.
— Un morphisme d'anneau $\varphi$ est **injectif** si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_A\}$.
— Un morphisme d'anneau $\varphi$ est **surjectif** si, et seulement si, $\mathrm{Im}(\varphi) = B$.

**Idéaux d'un anneau commutatif.** Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

— Lorsque l'anneau $A$ est commutatif, on dit que $I \subset A$ est un **idéal** de $A$ si : $(I,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$ et $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$.
— Soit $x \in A$, **l'idéal de $A$ engendré par** $x$ est défini par $xA = \{xa,\ a \in A\}$.
— On dit que $A$ est un **anneau intègre** si : $A \neq \{0_A\}$ est commutatif et $\forall (a,a') \in A^2, a \times a' = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a' = 0$.
— Soit $x, y$ deux éléments de l'anneau *intègre* $A$. $x$ **divise** $y$ si, et seulement si, $yA \subset xA$. On note alors $x|y$.

**Idéaux de $\mathbb{Z}$ et arithmétique dans $\mathbb{Z}$.** Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

— Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.
— L'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv,\ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ dont l'unique générateur positif est appelé **plus grand commun diviseur** (PGCD) de $a$ et $b$ et noté $a \wedge b$.
— L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ dont l'unique générateur positif est appelé **plus petit commun multiple** (PPCM) de $a$ et $b$ et noté $a \vee b$.
— **Théorème de Bézout.** $a \wedge b = 1$ si, et seulement si : $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$.
— **Théorème de Gauss.** Si $a \wedge b = 1$ et $a|bc$, alors $a|c$.

**Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.**

— $\mathrm{cl}(a) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible pour la loi $\times$ si, et seulement si, $a \wedge n = 1$ .
— $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps si, et seulement si, $p$ est un nombre premier.

**Indicatrice d'Euler.**

— On appelle fonction **indicatrice d'Euler** la fonction $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ qui à $n$ associe le nombre $\varphi(n)$ d'entiers dans $[\![ 1, n ]\!]$ premiers avec $n$.
— Calcul de l'indicatrice d'Euler d'un nombre entier :
  - Si $p$ est premier, alors $\varphi(p) = p - 1$ et $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
  - Si $m \wedge n = 1$, alors $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

**Morphismes d'anneau.**

— Il existe un unique **morphisme d'anneau** $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ défini par $\varphi(k) = k \cdot 1_A$.
— $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc $\exists m \in \mathbb{N} : \mathrm{Ker}(\varphi) = m\mathbb{Z}$. $m = \mathrm{car}(A)$ est appelé **caractéristique** de $A$.
— **Factorisation d'un morphisme.** Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ un morphisme d'anneau et $\pi$ la projection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $n$ est un multiple de $\mathrm{car}(A)$ (équivalent à $A \subset \mathrm{Ker}(\pi)$), alors il existe un unique morphisme $\widetilde{\varphi} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$ tel que : $\widetilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

**Idéaux de $\mathbb{K}[X]$ et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.** Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

— Les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont de la forme $P\mathbb{K}[X] = \{PQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.
— L'ensemble $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X] = \{PU + QV, (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ dont l'unique générateur unitaire est appelé **plus grand commun diviseur** (PGCD) de $P$ et $Q$ et noté $P \wedge Q$.
— L'ensemble $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ dont l'unique générateur unitaire est appelé **plus petit commun multiple** (PPCM) de $P$ et $Q$ et noté $P \vee Q$.
— **Théorème de Bézout.** $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si : $\exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2 : PU + QV = 1$.
— **Théorème de Gauss.** Si $P \wedge Q = 1$ et $P | QR$, alors $P | R$.

# INTÉGRALES IMPROPRES

$I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### Fonctions intégrales à valeurs positives et continues par morceaux.

Une fonction $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ est dite intégrable sur $I$ si il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout segment $J \subset I$, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$.
On note alors $\displaystyle\int_I f = \operatorname*{Sup}_{J \subset I} \int_J f$.

### Critères d'intégrabilité.

Soient $f, g \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$.
— Si : $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$, et si $g$ est intégrable sur $I$, alors $f$ est intégrable sur $I$.
Dans les trois résultats suivants, on supposera $I = [\,a\,,b\,[$ où $(a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.
— Si : $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors $f$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si, et seulement si, $g$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.
— Si : $f(t) = \underset{b}{o}(g(t))$, et si $g$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, alors $f$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.
— $f$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $b$, et on a alors : $\displaystyle\int_I f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

### Intégrales de Riemann.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.
— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\,1\,,+\infty\,[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]\,0\,,a\,]$ si, et seulement si, $\alpha < 1$.

### Intégrabilité pour des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

— Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$. $f$ est dite intégrable sur $I$ si $|f|$ est intégrable sur $I$.
— Cette définition étend celle de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Les propriétés usuelles de linéarité, positivité et la relation de Chasles s'étendent à cette nouvelle définition de l'intégrale.

### Continuité d'une intégrale à paramètre.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $A$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^m$, $f : A \times I \to \mathbb{K}$, telle que :
— $\forall t \in I,\ f(\cdot, t) \colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ ;
— $\forall x \in A,\ f(x, \cdot) \colon I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ ;
— **hypothèse de domination sur** $A$ : $\exists \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que : $\varphi$ est intégrable sur $I$ et : $\forall x \in A,\ |f(x, \cdot)| \leqslant \varphi$.
Alors $g \colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$.

### Dérivation d'une intégrale à paramètre.

Soit $A$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $f : A \times I \to \mathbb{K}$, telle que :
— $\forall x \in A,\ f(x, \cdot) \colon I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto f(x,t) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ ;
— $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ;
— $\forall t \in I,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot, t) \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{K})$ ;
— $\forall x \in A,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ ;
— **hypothèse de domination sur** $A$ : $\exists \varphi \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R}_+)$ telle que : $\varphi$ est intégrable sur $I$ et : $\forall x \in A,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi$.
Alors $g \colon A \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{K})$ et $\forall x \in A,\ g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Les deux derniers théorèmes restent vrais si l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte de $A$.

# Fonctions de plusieurs variables

$n$ et $p$ désignent deux entiers naturels non nuls, $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, |\cdot|)$ désignent deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions $n$ et $p$, $(G, |||\cdot|||)$ désigne un espace vectoriel normé, $\Omega$ désigne un ouvert de $E$, $f$ désigne une fonction de $\Omega$ dans $F$, $a$ désigne un élément de $\Omega$.

### Dérivée suivant un vecteur, dérivées partielles.

— Soit $h \in \Omega$, $h \neq 0_E$. $f$ admet en $a$ une dérivée suivant le vecteur $h$ si $\dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$ admet une limite quand $t$ tend vers 0, notée alors $\mathrm{D}_h f(a)$.
— Dans le cas particulier où $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $E$ fixée, on note, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la dérivée suivant le vecteur $e_i$ de $f$ en $a$, appelée dérivée partielle de $f$ par rapport à $x_i$.
— La dérivation partielle est linéaire et plus généralement, les règles de calcul usuelles sur les dérivées s'appliquent.

### Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ si $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$, et si ces dérivées partielles sont continues sur $\Omega$.
— $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si, et seulement si, pour tout $h \in E\backslash\{0_E\}$, $f$ admet une dérivée suivant le vecteur $h$ sur $\Omega$, et si ces dérivées sont continues sur $\Omega$.

### Fonction différentiable, différentielle.

— $f$ est différentiable en $a \in \Omega$ si il existe $\mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}(E, F)$, appelée différentielle de $f$ en $a$, telle que : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \mathrm{o}(h)$.
— Si $f$ est différentiable en $a$, alors elle admet une dérivée en $a$ suivant tout vecteur $h$, et alors $\mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{D}_h f(a)$.
— $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{F}) \Rightarrow f$ différentiable sur $\Omega$.
— Si $V$ un ouvert de $F$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, V)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ alors : $\mathrm{d}(f \circ g)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$.

### Matrice jacobienne, jacobien.

— Soit $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base de $F$, $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ la famille des fonctions composantes de $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ sur cette base. La matrice jacobienne de $f$ en $a$ est la matrice : $J_f(a) = \left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
— Le jacobien de $f$ en $a$ est le déterminant de $J_f(a)$.
— Si $V$ un ouvert de $F$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, V)$, $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ alors : $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a)$.

### Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwartz.

— $f$ admet une dérivée d'ordre 2 en $a$ suivant les vecteurs $e_i$ et $e_j$ si $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_j$ sur un ouvert contenant $a$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admet une dérivée partielle en $a$ par rapport à $x_i$, notée alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
— $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\Omega$ si : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $f$ admet une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à $x_i$ et $x_j$ et si ces dérivées partielles sont continues. On a alors : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i}\partial x_j = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i}\partial x_j$.

### Gradient.

Si : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et : $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, alors : $\forall a \in \Omega$, $\exists! \mathrm{grad}(f)(a) \in \mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n, \mathrm{d}_f(a)(h) = \langle \mathrm{grad}(f)(a) \mid h \rangle$.

### Inégalité des accroissements finis.

Si $\Omega$ est convexe, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $(a, b) \in \Omega^2, M \in \mathbb{R}_+$ tels que : $\forall a \in \Omega$, $\sum_{i=1}^{n} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right| \leqslant M$, alors : $|f(b) - f(a)| \leqslant M\|b-a\|_\infty$.

### Point critique, extremum local, point selle.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
— $a$ est un point critique de $f$ si : $\mathrm{d}f_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ ou, de façon équivalente, si : $\mathrm{grad}(f)(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
— Si $f$ admet un extremum local en $a$, alors $a$ est un point critique de $f$.
— Si $a$ est un point critique de $f$ qui n'est pas un extremum local de $f$, on dit que $a$ est un point selle.

# Suites et séries de fonctions

$A$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $A$.

**Convergence simple.**

— La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $A$ vers une fonction $f$ si : $\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$. La fonction $f$ est alors unique, et est appelée limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $A$ si $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $A$.

**Convergence uniforme.**

— $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A$ vers une fonction $f$ si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. La fonction $f$ est alors unique, et est appelée limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $A$ si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} f_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $A$.

**Converge uniforme $\Rightarrow$ Convergence simple.** La convergence uniforme implique la convergence simple, pour les suites comme pour les séries de fonctions.

**Convergence uniforme et caractère borné/continu.** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ et si toutes les fonctions $f_n$ sont bornées (resp. continues) sur A, alors $f$ est bornée (resp. continue) sur A.

**Théorème de la double limite.** Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ et si : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} b_n$, alors la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite $b$ vérifie : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

**Convergence normale.** $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $A$ si la série réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_\infty$ converge. Attention : la notion de convergence normale est réservée aux séries de fonctions.

**Converge normale $\Rightarrow$ Convergence uniforme.** La convergence normale d'une série de fonctions implique sa convergence uniforme.

**Convergence uniforme et intégration.**

— Si la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur un intervalle $[\,a\,,b\,]$ vers une fonction $f$, alors $f$ est continue sur $[\,a\,,b\,]$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

— Si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[\,a\,,b\,]$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Convergence uniforme et dérivation.**

— Si la suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur un intervalle $I$ vers une fonction $f$, et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $I$, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I,\ f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(x).$$

— Si la série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur un intervalle $I$, et si $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $I$, alors la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

# Séries entières

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes. On adopte la convention $\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### Définition.

La série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série de fonctions $z\mapsto \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

### Lemme d'Abel.

Soit $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors :

— $\forall z\in D(0,\rho)$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente ;

— $\forall l\in\,]\,0\,,\rho\,[$, $z\mapsto \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur $\bar{D}(0,l)$.

### Rayon de convergence.

— L'intervalle $\left\{\rho>0 \middle| \sum\limits_{n\geqslant 0}|a_n|\rho^n \text{ converge}\right\}$ admet une borne supérieure dans $[\,0\,,+\infty\,]$, appelé rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— Le disque (ouvert) de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est le disque $D(0,R)$, où $R$ est le rayon de convergence.

### Propriétés du rayon de convergence.

Soit $R$ le rayon de convergence $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— Si $|z|<R$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

— Si $|z|>R$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.

— Si $|z|=R$, on ne peut pas conclure.

— $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement sur tout compact du disque de convergence.

— $z\mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est définie et continue sur le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

— **Règle de D'Alembert** : si : $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l\in[\,0\,,+\infty\,]$, alors : $R=\dfrac{1}{l}$.

— **Règle de Cauchy** : si $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} l\in[\,0\,,+\infty\,]$, alors : $R=\dfrac{1}{l}$.

### Opérations algébriques et rayon de convergence.

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$, de disques de convergence respectifs $D_a$ et $D_b$.

— **Produit par un scalaire non nul.** Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$. Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\lambda a_n z^n$ est $R$, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lambda a_n z^n = \lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

— **Somme.** Le rayon de convergence $R_{a+b}$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ vérifie : $R_{a+b}\geqslant \inf(R_a,R_b)$.

De plus, $\forall z\in D_a\cap D_b$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

— **Produit de Cauchy.** Le rayon de convergence $R_{a*b}$ de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^n$ vérifie : $R_{a*b}\geqslant \inf(R_a,R_b)$.

De plus, $\forall z\in D_a\cap D_b$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

### Étude au bord du disque de convergence.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| t^n$ converge pour $t = R$ (resp. $t = -R$), alors la fonction définie sur $]-R\,,R]$ (resp. $[-R\,,R[$) par $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue au point $R$ (resp. $-R$).

### Intégration terme à terme.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle $x$, de rayon de convergence $R > 0$. La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence $R$, et $\forall x \in\, ]-R\,,R[$, $\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

### Dérivation terme à terme.

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle $x$, de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \dfrac{n!}{(n-r)!} x^{n-r}$ a pour rayon de convergence $R$, et $\forall x \in\, ]-R\,,R[$, $\dfrac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=r}^{+\infty} a_n \dfrac{n!}{(n-r)!} x^{n-r}$.

### Développement en série entière.

- Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : ]-r\,,r[\, \to \mathbb{K}$. $f$ est dite développable en série entière sur $]-r\,,r[$ s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$, telle que : $\forall x \in\, ]-r\,,r[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Si $f$ est développable en série entière sur $]-r\,,r[$, égale à $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$, alors : $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r\,,r[\,,\mathbb{K})$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

### Développements en série entière usuels.

- $\forall x \in\, ]-1\,,1[$, $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) \frac{x^n}{n!}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$ ;
- $\forall x \in\, ]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ;
- $\forall x \in\, ]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ ;
- $\forall x \in\, ]-1\,,1[$, $\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ ;
- $\forall x \in\, ]-1\,,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^{r+1}} = \displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r}{r} x^n$ $\quad (r \in \mathbb{N})$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ;
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

# Réduction des endomorphismes

$\mathbb{K}$ désigne un corps infini, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de $E$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de $u$ dans une certaine base.

## Valeurs propres.

— $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de $u$ si il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. $x$ est alors un *vecteur* propre de $u$ associé à $\lambda$.
— Le *spectre* de $u$ est l'ensemble de ses valeurs propres.
— Il y a au plus $n$ valeurs propres distinctes en dimension $n$.
— $u$ et $A$ ont même spectre.
— Le spectre de $A$ sur $\mathbb{L}$ contient le spectre de $A$ sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{L}$ est un corps contenant $\mathbb{K}$.
— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le spectre de $u$ est non vide.
— $A$ et ${}^tA$ ont même spectre, mais pas les mêmes sous-espaces propres.

## Sous-espaces propres.

— Le *sous-espace propre* de $u$ associé à $\lambda$ est $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
— Une droite $\mathrm{vect}(x)$ est stable par $u$ si et seulement si $x$ est un vecteur propre de $u$.
— Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres *distinctes* sont en somme directe.
— Si $f$ et $g$ commutent, les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$.

## Polynômes d'endomorphismes.

— Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$, avec $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.
— $\Phi_u \colon \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)\ ;\ P \longmapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre : on a $(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$, mais attention $P(u + \lambda v) \neq P(u) + \lambda P(v)$ et $P(u \circ v) \neq P(u) \circ P(v)$.
— L'idéal des *polynômes annulateurs* de $u$ est $\operatorname{Ker} \Phi_u$, il est engendré par le *polynôme minimal* de $u$ $\pi_u$. On a : $P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P$.
— $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \Phi_u$ est une algèbre commutative : $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

## Polynôme minimal.

— Le polynôme minimal $\pi_u$ de $u$ est défini par $P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P$.
— Les racines de $\pi_u$ sont exactement les valeurs propres de $u$.
— Si $\pi_u$ est de degré $d$, alors $\left(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
— **Lemme de décomposition des noyaux** : si $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ et que les $P_i$ sont premiers entre eux, $\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} P_i(u)$.

## Polynôme caractéristique.

— Le *polynôme caractéristique* $\pi_A$ de $A$ est $\chi_A = \det(X\mathrm{Id} - A) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. On pose $\chi_u = \chi_A$ : le polynôme caractéristique est indépendant de la base.
— Les racines de $\chi_u$ sont exactement les valeurs propres de $u$.
— Si $\chi_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, $\mathrm{tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
— Pour toute valeur propre $\lambda$ de $u$, $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \leqslant \alpha_\lambda$ la multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_u$.
— **Théorème de Cayley-Hamilton** : $\pi_u \mid \chi_u$, i.e. $\chi_u(u) = 0$.

## Diagonalisation.

— $u$ (et $A$) est *diagonalisable* $\iff E = \bigoplus_{\lambda} \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) \iff$ il existe une base de vecteurs propres de $u$ $\iff A$ est semblable à une matrice diagonale.
— $u$ est diagonalisable $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples $\iff \chi_u$ est scindé et pour toute valeur propre $\lambda$, $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}) = \alpha_\lambda$.

## Trigonalisation.

— $u$ (et $A$) est *trigonalisable* $\iff A$ est semblable à une matrice triangulaire.

— $u$ est trigonalisable $\iff$ $\pi_u$ est scindé $\iff$ $\chi_u$ est scindé. En particulier, $u$ est toujours trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

**Similitude.**

— Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P$, dite *de changement de base*, telle que $B = PAP^{-1}$. $A$ et $B$ sont alors les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.
— La similitude est une relation d'équivalence.
— Le spectre, le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, la trace et le déterminant sont des invariants de similitude. Ce n'est pas le cas des sous-espaces propres.

**Nilpotence.**

— $u$ est *nilpotent* $\iff$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$ $\iff$ il existe $k \in [\![ 0\,, n ]\!]$ tel que $u^k = 0$.
— $u$ est nilpotent $\iff$ $u$ est trigonalisable et a 0 pour seule valeur propre.

# Espaces Préhilbertiens Réels

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien **réel**.

## Rappel sur les supplémentaires orthogonaux.

- Soit $F$ une partie de $E$. On définit l'**orthogonal** de $F$ par : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x|y) = 0\}$.
- Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Si $F \oplus F^\perp = E$, alors $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de $F$.
- Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de **dimension finie**, alors il admet un supplémentaire orthogonal.

## Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

- Soient $F$ un sev de $E$ de dimension finie et $F^\perp$ son supplémentaire orthogonal. Alors tout élément $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_F + x_{F^\perp} \in F \oplus F^\perp$ et l'endomorphisme défini par $p_F : E \to E$ tel que $p_F(x_F + x_{F^\perp}) = x_F$ est appelé **projection orthogonale sur** $F$.
- **Caractérisation métrique.** Le projeté orthogonal de $x \in E$ sur $F$ est l'unique vecteur $f \in F$ vérifiant : $\|x - f\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$. On a alors : $\|x\|^2 = \|f\|^2 + \|x - f\|^2$.
- Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base orthonormale de $F$, $\forall x \in E, p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (x|e_k)e_k$.
- **Inégalité de Bessel.** Pour $(f_1, f_2, ..., f_n)$ une famille orthonormale d'éléments de $E$ : $\forall x \in E, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x|f_k)^2 \leqslant \|x\|^2$.

## Suites totales.

- Une suite $(a_n)_n$ de vecteurs de $E$ est **totale** lorsque le sev $\text{Vect}(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans $E$.
- Si $(a_n)_n$ est une suite totale, alors $\text{Vect}(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\})^\perp = \{0_E\}$.
- **Caractérisation des suites totales.** Une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $E$ est totale ssi pour tout $x \in E$, la suite des projetés orthogonaux de $x$ sur $\text{Vect}(a_0, a_1, ..., a_n)$ converge vers $x$.
- **Caractérisation des suites orthonormales totales.** Une suite orthonormale $(e_n)_n$ d'éléments de $E$ est totale ssi pour tout $x \in E$, la série $\sum (x|e_n)^2$ converge vers $\|x\|^2$.

## Endomorphisme symétrique.

- Un endomorphisme $u$ de $E$ est dit **symétrique** lorsque $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$.
- L'ensemble des endomorphismes symétriques est noté $\mathcal{S}(E)$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
  Si $\dim(E) = n$, alors $\dim(\mathcal{S}(E)) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- **Caractérisation matricielle.** Un endomorphisme est symétrique ssi sa matrice exprimée dans une base orthonormale est symétrique (elle est sa propre transposée).
- Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)^\perp$.
- Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et $F$ un sev stable par $u$. Alors $F^\perp$ est aussi stable par $u$.

## Projecteur symétrique.

- Un projecteur $p$ est endomorphisme de $E$ qui vérifie $p^2 = p$.
- Un projecteur $p$ est symétrique ssi c'est une projection orthogonale : il existe un sous-espace $F$ de $E$ tel que $F \oplus F^\perp = E$ et $p$ projette sur $F$ parallèlement à $F^\perp$.

## Théorème spectral. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- Les valeurs propres de $u$ sont réelles.
- $E$ est en somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $u$.
- Autrement dit, il existe une base orthonormale diagonalisant $u$.
- Matriciellement, toute matrice $A$ **réelle et symétrique** est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice orthogonale $P$ et une matrice diagonale réelle $D$ telles que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$.

# Équations Différentielles Linéaires

$E$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$ une application continue de $I$ dans $\mathcal{L}(E)$, $b$ une application continue de $I$ dans $E$ et $y$ une application dérivable de $I$ dans $E$. On note alors $ay$ l'application allant de $I$ dans $E$ qui vérifie : $\forall t \in I, ay(t) = a(t)(y(t))$.

### Équation différentielle linéaire d'ordre 1.

— On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1** toute équation de la forme $y' = ay + b$.
— Une **solution** de l'équation précédente est une application $y$ dérivable allant de $I$ dans $E$ vérifiant : $\forall t \in I, y'(t) = a(t)(y(t)) + b(t)$.
— En choisissant une base de $E$, l'équation différentielle précédente se réécrit matriciellement telle que : $\forall t \in I, Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$, où $Y$ et $B$ sont des matrices colonnes représentant les vecteurs $y$ et $b$ et où $A$ est la matrice carrée de l'application $a$ dans la base choisie.
— On appelle **équation homogène** associée à l'équation $y' = ay + b$ l'équation $y' = ay$.
— La dimension de l'espace des solutions de l'équation $y' = ay$ vaut $n = \dim(E)$.
— Les solutions de l'équation différentielle totale s'écrivent sous la forme $y = y_h + y_p$, où $y_h$ est une solution de l'équation homogène associée et $y_p$ est une solution particulière de l'équation *totale*.
— Si $E = \mathbb{K}$, alors il existe $C \in \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I, y_h(t) = Ce^{\alpha(t)}$, où $\alpha$ est une primitive de la fonction $a$ sur $I$.

### Problème de Cauchy.

— Un **problème de Cauchy** sur $I$ est la donnée d'une équation différentielle $y' = ay + b$ couplée à une **condition initiale** $x(t_0) = x_0 \in E$, où $t_0 \in I$.
— **Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire** : pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution sur $I$ de l'équation $y' = ay + b$ vérifiant $y(t_0) = y_0$.

### Système fondamental de solutions. Wronskien.

— On appelle **système fondamental de solutions** toute base de l'espace des solutions de l'équation homogène $y' = ay$. Cette base contient $n$ éléments.
— Pour toute famille $(y_1, y_2, ..., y_n)$ de solutions de l'équation homogène, on appelle **wronskien** relativement à une base $\mathcal{B}$ l'application $\mathcal{W}$ de $I$ dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall t \in I, \mathcal{W}(t) = \det_{\mathcal{B}}(y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t))$.
— Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
  - La famille $(y_1, y_2, ..., y_n)$ est un système fondamental de solutions.
  - $\forall t \in I, \mathcal{W}(t) \neq 0$.
  - $\exists t_0 \in I, \mathcal{W}(t_0) \neq 0$.

### Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice.

On se donne un endomrophisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A$ sa matrice exprimée dans une base $\mathcal{B}$ de $E$.

— L'**exponentielle de l'endomorphisme** $u$ est définie par l'endomorphisme $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$, où $u^k$ est l'endomorphisme $u$ composé $k$ fois.
— L'**exponentielle de la matrice carrée** $A$ est définie par la matrice $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.
— Si $v \in \mathcal{L}(E)$ *commutant avec* $u$, alors $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$.
— L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \exp(tu)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$.
— Lorsque $A$ est diagonalisable, il existe une matrice $P$ inversible et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$, où $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n})$.

### Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

— L'équation différentielle homogène $y' = ay$ est dite **à coefficients constants** si $a \in \mathcal{L}(E)$ est indépendant de la variable $t$. En choisissant une base de $E$, l'équation se réécrit matriciellement : $\forall t \in I, Y'(t) = AY(t)$.
— Soit un vecteur $u \in E$, la fonction définie par $\forall t \in I, y(t) = \exp(ta)(u)$ est solution de l'équation $y' = ay$.
— Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$, alors la famille de fonctions représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $\exp(tA)$ est un système fondamental de solutions.

### Recherche de solutions particulières.

— **Principe de superposition.** Si $b = \sum_{k=0}^{N} b_i$ et que les $(y_i)$ sont solutions des équations $y' = ay + b_i$, alors $y_p = \sum_{k=0}^{N} y_i$ est une solution particulière de l'équation totale $y' = ay + b$.

— **Variation de la constante.** On se donne $(y_1, y_2, ..., y_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = ay$. Il est possible de chercher une solution particulière de l'équation totale $y' = ay + b$ de la forme $y_p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)y_k(t)$, avec $(c_k)_k$ une famille de fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{K}$. Dans une base $\mathcal{B}$ de $E$, cela s'écrit matriciellement : $Y_p(t) = F(t)C$ où $F(t)$ est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $(y_k(t))_k$ et $C$ est la matrice colonne composée des scalaires $(c_k(t))_k$.
$Y_p$ est solution de $Y' = AY + B$ si, et seulement si, $C'(t) = F^{-1}(t)B(t)$. Cette dernière relation fournit l'expression des $c_k'(t)$ dont il suffit de déterminer une primitive.

— **Cas où $a$ est constante.** Dans le cas où $a$ ne dépend pas de la variable $t$, $F^{-1}(t) = \exp(tA)^{-1} = \exp(-tA)$.

### Cas particulier des équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2.

Considérons l'équation différentielle $a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$, où $a, b, c$ et $d$ sont des fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{K}$. **Attention !** La méthode avec le polynôme caractéristique ne s'applique que si les fonctions $a$, $b$ et $c$ sont constantes !

— On commence par se placer sur un intervalle $I$ sur lequel la fonction $a$ ne s'annule pas.

— On réécrit l'équation différentielle sous sa forme **résolue** : $y'' = \alpha(t)y' + \beta(t)y + \gamma(t)$, où $\alpha = -b/a$, $\beta = -c/a$ et $\gamma = d/a$.

— On transpose l'écriture sous forme matricielle en introduisant $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha(t) & \beta(t) \end{pmatrix}$ et $B(t)\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, on peut écrire $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$. On se ramène alors à une équation différentielle d'ordre 1 sur l'espace $\mathbb{K}^2$.

— On commence par chercher un système fondamental de solutions $(y_1, y_2)$ de l'équation homogène $Y' = A(t)Y$.
  - S'il existe $P$ inversible et indépendante de $t$ et une matrice diagonale $D$ telles que $A(t) = PD(t)P^{-1}$, alors on peut écrire : $(P^{-1}Y)' = D(t)(P^{-1}Y)$ qui se résout plus facilement (équation différentielle scalaire du premier ordre).
  - Dans le cas où $A(t)$ ne dépend pas de $t$, il suffit de prendre $y_i(t) = \exp(tA)e_i$, où $(e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$.
  - Sinon, on montre que (i) $y_1$ et $y_2$ sont des solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$ et (ii) que le wronskien $\mathcal{W}(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$ ne s'annule pas en un point.

— On cherche ensuite une solution particulière. Si celle-ci n'est pas évidente, où ne peut pas être déterminée avec les méthodes de sup, on procède à la variation de la constante :
  - On suppose que la solution a la forme $y_p(t) = \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$.
  - On sait alors que : $\begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$.
  - Il reste à déterminer une primitive de $\lambda'$ et de $\mu'$ pour obtenir une solution particulière.

— On écrit les solutions de l'équation totale sous la forme : $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) + y_p(t)$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

— Si la fonction $a$ s'annule en certains points, on suit la méthode précédente sur chacun des intervalles $I$ sur lesquels $a$ ne s'annule pas. Puis on recolle les fonctions obtenues en les points d'annulation. On vérifie enfin que la fonction obtenue est bien dérivable deux fois et qu'elle vérifie l'équation différentielle en les points où $a$ s'annule.

# Espaces Vectoriel Normés

Soient $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $N$ vérifiant les propriétés ci-dessous.

**Norme.** L'application $N$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ est une norme si elle vérifie :

— la *positivité* : $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$,
— l'*axiome de séparation* : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$,
— l'*homogénéité* : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
— l'*inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

**Norme associée à un produit scalaire.** La norme $N$ associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$ est définie par :

— $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

**Normes usuelles.** Les applications suivantes sont les normes usuelles à connaître :

— Dans $\mathbb{K}^n$, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, $N_1(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ et $N_\infty(x) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
— Dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, $N_1(x) = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$. C'est la **norme de convergence en moyenne**.
— Dans $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, pour $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, $N_2(x) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$. C'est la **norme de convergence en moyenne quadratique**.
— Pour $f$ une fonction bornée à valeurs dans $\mathbb{K}$, $N_\infty(x) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$. C'est la **norme de convergence uniforme**.

**Normes équivalentes.** Les normes $N_1$ et $N_2$ sont dites **équivalentes** si :

— $\exists (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 : \alpha N_1 \leqslant N_2 \leqslant \beta N_1$.
— Lorsque $E$ est de **dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.

**Distance.** L'application $d$ de $E^2$ dans $\mathbb{R}$ est une distance si elle est vérifie :

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geqslant 0$,
— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$,
— $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

**Distance associée à une norme.** La distance $d$ associée à la norme $N$ est définie par :

— $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = N(y - x)$.

**Boules et sphères.**

— On appelle **boule fermée** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x-a) \leqslant r\}$.
— On appelle **boule ouverte** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{B}_{\mathrm{O}}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x-a) < r\}$.
— On appelle **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \,|\, N(x-a) = r\}$.

**Parties, suites et fonctions bornées.**

— On appelle **partie bornée** toute partie de $E$ qui est incluse dans au moins une boule.
— On appelle **application bornée** toute application dont l'image est bornée.
— On appelle **suite bornée** toute suite $(u_n)$ telle que l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

**Suites convergentes et divergentes.** Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $E$.

— On dit que $(u_n)$ **converge** si : $\exists l \in E : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n_0, N(u_n - l) \leqslant \varepsilon$.
— On dit que $(u_n)$ **diverge** si $(u_n)$ ne converge pas.
— Si la suite $(u_n)$ est convergente, alors elle est bornée et sa limite est unique.
— On appelle **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)$ toute limite d'une suite extraite de $(u_n)$.
— Une suite avec au moins deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

# Topologie d'un Espace Normé

Soit $E$ un espace vectoriel normé muni de la norme $N$ et $A$ une partie de $E$.

**Voisinage d'un point.** Soit $x \in E$.

— On appelle **voisinage** de $x$ toute partie de $E$ qui contient une boule ouverte de centre $x$.
— On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$.
— Dire que $V \in \mathcal{V}(x)$ signifie que : $\exists r > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < r \Rightarrow y \in V$.

**Ouverts et fermés de $E$.**

— On appelle **ouvert** de $E$ toute partie de $E$ qui est un voisinage de chacun de ses points.
— Ou encore, $\mathcal{O}$ est un ouvert de $E$ ssi pour tout $x \in \mathcal{O}$, il existe une boule ouverte centrée en $x$ incluse dans $\mathcal{O}$.
— Autrement dit, $\mathcal{O}$ est un ouvert de $E$ ssi $\forall x \in \mathcal{O}, \exists r > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < r \Rightarrow y \in \mathcal{O}$.
— $E$, $\varnothing$ et toute boule ouverte de $E$ sont des ouverts de $E$.
— On appelle **fermé** de $E$ toute partie de $E$ dont le complémentaire dans $E$ est un ouvert de $E$.
— $E$, $\varnothing$, tout singleton $\{x\}$ de $E$ et toute boule fermée de $E$ sont des fermés de $E$.
— **Caractérisation séquentielle des fermés.** $F$ est un fermé de $E$ ssi pour toute suite d'éléments de $F$ convergente, la limite est dans $F$.

**Stabilité des ouverts et des fermés.**

— Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
— Toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.
— Toute intersection de fermés est un fermé.
— Toute réunion **finie** de fermés est un fermé.

**Point adhérent et adhérence.**

— Soit $x \in E$, on dit que $x$ est **adhérent** à $A$ si tout voisinage de $x$ rencontre $A$ : $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing$.
— $x$ est adhérent à $A$ ssi toute boule fermée centrée en $x$ contient au moins un élément de $A$ : $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : N(a-x) \leqslant \varepsilon$.
— On appelle **adhérence** de $A$ l'ensemble des points adhérents à $A$. On la note $\bar{A}$.
— **Caractérisation de l'adhérence.** $\bar{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$. $\bar{A}$ est donc un fermé de $E$.
— **Caractérisation séquentielle de l'adhérence.** $x$ est adhérent à $A$ ssi il existe une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.
— $A$ est un fermé de $E$ ssi $\bar{A} = A$.
— On dit que $B \subset A$ est **dense** dans $A$ quand $\bar{B} = A$.

**Point intérieur, intérieur et frontière.**

— On dit que $x$ est un **point intérieur** à $A$ lorsque $A$ est un voisinage de $x$.
— Autrement dit, $x$ est un **point intérieur** à $A$ lorsqu'il existe une boule ouverte de centre $x$ contenue dans $A$ : $\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in E, N(y-x) < \varepsilon \Rightarrow y \in A$.
— On appelle **intérieur** de $A$ l'ensemble des points intérieurs à $A$. On le note $\overset{\circ}{A}$.
— **Caractérisation de l'intérieur.** $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $A$. $\overset{\circ}{A}$ est donc un ouvert de $E$.
— On appelle **point frontière** de $A$ un point adhérent à $A$ qui n'est pas intérieur à $A$.
— On appelle **frontière** de $A$ l'ensemble des points frontières de $A$ : $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.
— On a les égalités suivantes : $\complement_E \bar{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_E A}}$ et $\complement_E \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_E A}$.

**Topologie induite sur $A$.**

— Soit $a \in A$. On appelle **voisinage de $a$ relatif à** $A$ l'intersection de $A$ avec un voisinage de $a$.
— On appelle **ouvert** (resp. **fermé**) **relatif à** $A$ l'intersection de $A$ avec un ouvert (resp. un fermé) de $E$.

# Compacité et Connexité par Arc

Soit $E$ un espace vectoriel normé muni de la norme $N$.

**Théorème de Bolzano-Weierstrass.**

— Toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** admet au moins une valeur d'adhérence.
— Autrement dit, toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de **dimension finie** admet une sous-suite convergente.

**Parties compactes.**

— Une partie $A$ de $E$ est dite **compacte** si pour toute suite d'éléments de $A$ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $A$.
— Toute intersection de parties compactes est compacte.
— Toute réunion **finie** de parties compactes est compacte.
— Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte.
— Tout produit **fini** de parties compactes est compact.
— Toute partie compacte est fermée et bornée.

**Parties compactes en dimension finie.** On suppose que $E$ est de dimension finie.

— **Caractérisation des parties compactes.** En **dimension finie**, une partie $A$ de $E$ est compacte ssi $A$ est une partie fermée et bornée de $E$.

**Compacité et applications continues.** On se donne $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés.

— Si $K$ est un compact de $E$ et $f$ une application **continue** de $E$ dans $F$, alors $f(K)$ est un compact de $F$.
— **Théorème des bornes atteintes.** Si $K$ est un compact de $E$ et $f$ une application **continue** de $K$ dans $F$, alors $f$ est bornée et atteint ses bornes.
— **Théorème de Heine.** Si $f$ est continue sur un compact $K$ de $E$, alors $f$ est **uniformément** continue sur $K$.

**Connexité par arcs.** On se donne $A$ une partie de $E$.

— On appelle **chemin** toute application **continue** $\gamma$ de $[0,1]$ dans $A$.
— On appelle **arc** l'ensemble $\gamma([0,1])$ des points atteints par un chemin. $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont appelés **extrémités** de ce chemin.
— La relation $\mathcal{R}$ définie sur $A$ par $a\mathcal{R}b$ ssi il existe un chemin continu reliant $a$ et $b$ est une relation d'équivalence.
— Les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ sont appelées les **composantes connexes par arcs** de $A$.
— $A$ est dite **connexe par arcs** lorsqu'elle n'admet qu'une unique composante connexe par arcs.
— Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

**Connexité par arcs et applications continues.**

— L'image d'un connexe par arcs par une application continue est encore connexe par arcs.
— **Théorème des valeurs intermédiaires.** Si $f$ est une application continue d'une partie $A$ de $E$ connexe par arcs dans $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
— Autrement dit, si $f$ est une fonction continue sur un connexe par arcs $A$ et qu'elle atteint les réels $a$ et $b$ ($a < b$), alors elle atteint sur $A$ toutes les valeurs de l'intervalle $[a, b]$.

**Parties convexes et étoilées.**

— Pour $x, y \in E$, on appelle **segment** $[x, y]$ l'ensemble des points $\{tx + (1-t)y \,|\, t \in [0,1]\}$.
— Une partie $A$ de $E$ est dite **convexe** si pour tout $x, y$ dans $E$ le segment $[x, y]$ est inclus dans $A$.
— Une partie $A$ de $E$ est dite **étoilée** s'il existe un élément $a$ de $A$ tel que : $\forall x \in A, [a, x] \subset A$.

# Applications dans un Espace Vectoriel Normé

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés munis respectivement des normes $N$ et $N'$. On se donne $A$ une partie de $E$ et $f$ une application de $A$ dans $F$.

**Limite d'une application en un point adhérent.** Soit $a \in \bar{A}$.

— $f$ **admet pour limite** $l \in F$ **au point** $a$ si pour tout voisinage $V$ de $l$, il existe un voisinage $W$ de $a$ relatif à $A$ tel que $f(W) \subset V$. Autrement dit : $\forall V \in \mathcal{V}_F(l), \exists W \in \mathcal{V}_E(a) : f(W \cap A) \subset V$.
— Ou encore : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in A, N_1(x-a) \leqslant \eta \Rightarrow N_2(f(x)-l) \leqslant \varepsilon$.
— Lorsqu'une telle limite existe, elle est **unique**.
— Si $l$ est la limite de $a$ par $f$ alors $l$ est adhérent à $f(A)$.
— **Caractérisation séquentielle.** $f$ admet une limite en $a$ ssi pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $A$ convergeant vers $a$, la suite $(f(u_n))$ est convergente.
— Dans $\mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de $+\infty$ (resp. $-\infty$) toute partie de $\mathbb{R}$ qui contient au moins un intervalle de la forme $[c, +\infty[$ (resp. $]-\infty, c]$).

**Opérations sur les limites.**

— Soient $F_1, F_2, ..., F_n$ un nombre fini d'espaces vectoriels normés et $F = F_1 \times F_2 \times ... \times F_n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on se donne une application $f_i$ de $A$ dans $F_i$ et on définit $f$ de $A$ dans $F$ par $f(a) = (f_1(a), ..., f_n(a))$. $f$ admet en $a \in A$ la limite $l = (l_1, ...l_n)$ ssi pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_i$ admet pour limite $l_i$ en $a$.
— Soient $E, F$ et $G$ trois espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications et $a$ un point adhérent à $A$. Si $f$ admet pour limite $b$ au point $a$ et que $g$ admet pour limite $c$ au point $b$, alors $g \circ f$ admet pour limite $c$ au point $a$.
— Soient $f$ et $g$ deux applications de $A$ dans $F$ admettant respectivement $l_f$ et $l_g$ pour limites en $a$. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, l'application $\lambda f + \mu g$ admet une limite en $a$ et cette limite vaut $\lambda l_f + \mu l_g$.
— Soient $f : A \Rightarrow F$ et $u : A \Rightarrow \mathbb{K}$ deux applications admettant respectivement $l$ et $\lambda$ pour limites en $a$ adhérent à $A$. Alors, l'application $u \times f$ admet une limite en $a$ et cette limite vaut $\lambda l$.
— En particulier, les applications **polynômiales** sont continues.

**Continuité d'une application.** Soit $a \in A$.

— Si $f$ admet $f(a)$ comme limite au point $a$, alors $f$ est **continue** en $a$.
— Si $f$ est continue sur tous les points de $A$, alors $f$ est **continue** sur $A$.
— **Caractérisation séquentielle.** $f$ est continue en $a$ ssi pour toute suite $(u_n)$ d'éléments de $A$ convergeant vers $a$, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.
— La composée de deux applications continues est encore continue.
— **Théorème.** Si deux fonctions **continues** coïncident sur une partie $B$ dense dans $A$, alors ces deux applications coïncident sur $A$.

**Caractérisation de la continuité par l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé.**
Les trois propositions suivantes sont équivalentes

- $f$ est continue sur $A$.
- L'image réciproque par $f$ de tout fermé de $F$ est un fermé relatif de $A$.
- L'image réciproque par $f$ de tout ouvert de $F$ est un ouvert relatif de $A$.

**Continuité uniforme.**

— On dit que $f$ est **uniformément continue** sur $A$ lorsque : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x,y) \in A^2, N_1(y-x) \leqslant \eta \Rightarrow N_2(f(y)-f(x)) \leqslant \varepsilon$.
— On dit que $f$ est $k$**-lipschitzienne** lorsqu'il existe $k \geqslant 0$ tel que : $\forall (x,y) \in A^2, N_2(f(y)-f(x)) \leqslant kN_1(y-x)$.
— Si $f$ est $k$-lipschitzienne, alors elle est uniformément continue.

**Applications linéaires continues.** On suppose que $f : E \to F$ est linéaire.

— $f$ est continue sur $E$ **ssi** $f$ est continue en $0_E$ **ssi** $f$ est bornée sur la boule unité **ssi** $f$ est lipschitzienne sur $E$ **ssi** $f$ est uniformément continue sur $E$ **ssi** $\exists C \geqslant 0 : \forall x \in E, N_2(f(x)) \leqslant CN_1(x)$.
— En **dimension finie**, toute application linéaire, bilinéaire ou multilinéaire est continue.
— En particulier, le déterminant est une application continue en dimension finie.

# Séries réelles et vectorielles

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels ou d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

**Définitions et notations.**

- On appelle **série de terme général** $u_n$ la suite $(S_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note $\sum u_n$.
- Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, $S_n$ s'appelle **somme partielle** de la série $\sum u_n$.
- On dit que la série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_n$ converge.
- **Quand la série** $\sum u_n$ **converge**, on appelle **somme** de $\sum u_n$ la limite de la suite $(S_n)_n$. On la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

  **Attention.** Cette notation n'a pas de sens quand la série ne converge pas.
- **Quand la série** $\sum u_n$ **converge**, on appelle **reste d'ordre** $n$ de $\sum u_n$ l'élément $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n$.

  **Attention.** Cette notation n'a pas de sens quand la série ne converge pas.
- Quand une série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

**Divergence grossière.**

- Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_n$ tend vers 0.
- Si $(u_n)_n$ ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ ne converge pas. On dit alors que la série **diverge grossièrement**.

**Convergence absolue.**

- On dit que la série réelle (resp. d'éléments de $E$) $\sum u_n$ **converge absolument** quand la série $\sum |u_n|$ (resp. $\sum \|u_n\|$) converge.
- Si une série réelle converge absolument, alors elle est convergente.
- Si une série vectorielle converge absolument et que $E$ est de **dimension finie**, alors elle est convergente.
- La réciproque est **fausse** : il existe des séries convergentes mais qui ne convergent pas absolument. Elles sont dites **semi-convergentes**.

**Séries particulières.** On suppose que $E$ est de dimension finie.

- Soit $u \in E$, on appelle **série géométrique** la série $\sum u^n$. Quand $\|u\| < 1$, cette série est convergente.
- Soit $u \in E$, on appelle **série exponentielle** la série $\sum \frac{u^n}{n!}$. Cette série est absolument convergente. On note sa somme : $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}$.

**Règle de d'Alembert.** Soit $\sum u_n$ une série à termes réels **strictement positifs**.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ et que $l > 1$ (resp. $l < 1$), alors $\sum u_n$ diverge (resp. converge). Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
- Si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant k$ avec $k \in ]0, 1[$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

**Critère spécial des séries alternées.**

- Si $\sum u_n$ est alternée $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leqslant 0)$ et que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante et tend vers 0, alors $\sum u_n$ converge.

**Produit de Cauchy.** On suppose que $E$ est de dimension finie.

- On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries réelles convergentes à termes positifs (resp. vectorielles absolument convergentes), alors leur produit de Cauchy converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_n\right)$.

**Comparaison série-intégrale.** Soit $f$ une fonction réelle positive et décroissante.

— La série de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$ est convergente.

— La série $\sum f(n)$ converge ssi la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)dt\right)_n$ converge.

**Sommation des relations de comparaison.**

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries convergentes à termes réels **positifs** et que $R_n$ et $R'_n$ sont leurs restes d'ordre $n$ respectifs, alors :
  - Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n = o(R'_n)$.
  - Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n = O(R'_n)$.
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n \sim R'_n$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries divergentes à termes réels **positifs** et que $S_n$ et $S'_n$ sont leurs sommes partielles d'ordre $n$ respectives, alors :
  - Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(S'_n)$.
  - Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n = O(S'_n)$.
  - Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n \sim S'_n$.

# Familles Sommables de Nombres Complexes

**Dénombrabilité.**

— Un ensemble est dit **dénombrable** lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
— Toute partie **infinie** de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
— Un ensemble est fini ou dénombrable ssi il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
— Un produit cartésien **fini** d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.
— Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.
— **Exemples.** Les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Famille sommable de réels positifs.** Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

— On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour toute partie **finie** $J \subset I$, on ait $\displaystyle\sum_{j\in J} u_j \leqslant M$.
— On définit alors la **somme de la famille** par $\displaystyle\sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{finie}}} \sum_{j\in J} u_j$. On la note $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$.
— Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.
— **Cas $I = \mathbb{N}$.** La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_i$ converge.

**Théorème de sommation par paquets.** Soit $(I_n)_n$ une partition de $I$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

— La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ssi (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et (ii) la série $\sum\big(\sum_{i\in I_n} u_i\big)$ converge.
— Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

**Famille sommable réelle ou complexe.**

— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou de complexes. On dit que cette famille est **sommable** si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.
— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. En notant $I_+ = \{i \in I \,|\, u_i \geqslant 0\}$ et $I_- = \{i \in I \,|\, u_i < 0\}$, les familles $(u_i)_{i\in I_+}$ et $(u_i)_{i\in I_-}$ sont sommables et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_+} |u_i| - \sum_{i\in I_-} |u_i|$.
— Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes sommable. Les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ sont sommables et on a : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$.
— **Cas $I = \mathbb{N}$.** La famille de réels ou de complexes $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum u_i$ converge absolument.

**Permutation des termes d'une série absolument convergente.**

— Soient $\sum u_n$ une série de termes complexes **absolument** convergente et $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}$. Alors $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

**Théorème de sommation par paquets.** Soit $(I_n)_n$ une partition de $I$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille réelle ou complexe.

— La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable ssi (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable et (ii) la série $\sum\big(\sum_{i\in I_n} |u_i|\big)$ converge.
— Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

**Intervertion de sommes sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de nombres réels positifs.**

— La famille de réels positifs $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est **sommable** ssi (i) pour tout $j$, la série $\sum_i u_{i,j}$ est convergente de somme $S_j$ et (ii) la série $\sum_j S_j$ est convergente.
— Dans ce cas, (i) pour tout $i$, la série $\sum_j u_{i,j}$ est convergente de somme $T_i$, (ii) la série $\sum_i T_i$ est convergente et

(iii) on a l'égalite $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

**Intervertion de sommes sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de nombres complexes.**

— La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est **sommable** ssi pour tout $i$, la série $\sum_j u_{i,j}$ est absolument convergente et la série $\sum_i \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ est convergente.

— La famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est **sommable** ssi pour tout $j$, la série $\sum_i u_{i,j}$ est absolument convergente et la série $\sum_j \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} |u_{i,j}|\right)$ est convergente.

— Quand $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, on a l'égalite $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}\right)$.

**Produit de Cauchy.**

— On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries complexes **absolument convergentes**, alors leur produit de Cauchy converge absolument et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_n\right)$.

# Probabilités

Soit $\Omega$ un univers au plus dénombrable. L'ensemble des événements est alors $\mathcal{P}(\Omega)$.

**Tribu.** On appelle **tribu** sur $\Omega$ une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :

— $\Omega \in \mathcal{T}$.
— $\forall A \in \mathcal{T}, \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$.
— Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

**Conséquences immédiates de la définition.** Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $\Omega$.

— $\varnothing \in \mathcal{T}$.
— $\mathcal{T}$ est stable par réunion finie et par intersection finie.
— Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore dans $\mathcal{T}$.
— Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap \bar{B} \in \mathcal{T}$.

**Espace probabilisable et événement.** Soit $\mathcal{T}$ une tribu de $\Omega$.

— Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé **espace probabilisable**.
— Un élément $A$ de $\mathcal{T}$ est appelé **événement**.

**Probabilité.** Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable.

— On appelle **probabilité** toute application $P$ définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que (i) $P(\Omega) = 1$ et (ii) pour toute suite $(A_n)_n$ d'événements deux à deux disjoints, la série $\sum P(A_n)$ converge et $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
— On appelle alors le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un **espace probabilisé**.
— Sur un tel espace, pour tout $A \subset \Omega$, $P(A) = \sum\limits_{a\in A} P(\{a\})$.

**Théorème de la limite monotone.**

— Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements croissante pour l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
— Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements décroissante pour l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), $P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

**Inégalité de Boole.**

— Si $(A_n)_n$ une suite d'événements telle que la série $\sum P(A_n)$ converge, alors : $P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

**Événements négligeables et presque sûrs.**

— Un événement $A$ est dit **négligeable** lorsque $P(A) = 0$.
— Un événement $A$ est dit **presque sûr** lorsque $P(A) = 1$.
— Une réunion **au plus dénombrable** d'événements négligeables est un événement négligeable.
— Une intersection **au plus dénombrable** d'événements presque sûrs est un événement presque sûr.

**Probabilité conditionnelle.** Soit un événement $A \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle.

— L'application $P_A : \mathcal{T} \to [0,1]$ vérifiant $P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ est une probabilité.
— $P_A$ est appelée **probabilité conditionnellement à** $A$ ou encore probabilité sachant $A$.
— On note la probabilité de $B$ sachant $A$ : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.

**Formule des probabilités composées.** Soit $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ une suite d'événements de probabilités non nulles.

— $P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right) = \prod\limits_{k=0}^{n} P\left(A_k | \bigcap\limits_{l=0}^{k-1} A_l\right) = P(A_0) \times P(A_1|A_0) \times P(A_3|A_1\cap A_2) \times \ldots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

**Formule des probabilités totales.**

— Un **système complet d'événements** est une partition au plus dénombrable de $\Omega$. C'est donc une famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, où $I$ est au plus dénombrable, telle que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ et $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors :
$\forall B \in \mathcal{T},\ P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$.

### Formule de Bayes.

— Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et $B$ est un événement de probabilité également non nulle, alors :
$\forall i \in \mathbb{N},\ P(A_i|B) = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)} = \dfrac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$.

### Événements indépendants.

— On dit que deux événements $A$ et $B$ sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
— Lorsque $P(A) > 0$, cette condition est équivalente à $P(B|A) = P(B)$.
— Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $B$ ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

### Indépendance d'une suite d'événements.

— Une suite d'événement $(A_n)_{n\in I}$ au plus dénombrable (avec $I \subset \mathbb{N}$) est une suite d'**événements mutuellement indépendants** lorsque pour tout ensemble fini $J \subset I$, on a : $P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$.
— Si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors ces événements sont indépendants deux à deux. **Attention !** La réciproque est fausse !
— Si $(A_n)_{n\in I}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors : $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(A_k)$.

# Variables Aléatoires Discrètes

Soient $\Omega$ un univers au plus dénombrable et $E$ un ensemble donné.

## Variable aléatoire discrète.

— Une **variable aléatoire discrète** définie sur $\Omega$ et à valeur dans $E$ est une application $X : \Omega \to E$ vérifiant :
  - $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
  - Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega \,|\, X(w) = x\}$ est un événement. On note cet événement $(X = x)$.

— Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on dit que $X$ est une variable aléatoire **réelle**.

— Quand $E \subset \mathbb{R}$, on définit les événements : $(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x])$, $(X < x) = X^{-1}(]-\infty, x[)$, $(X \geqslant x) = X^{-1}([x, +\infty[)$ et $(X > x) = X^{-1}(]x, +\infty[)$.

**Loi de probabilité d'une variable aléatoire.** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.

— L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X(\Omega))$ est une tribu sur $X(\Omega)$.

— L'application $P_X : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie par $P_X(A) = P(X \in A)$ est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{A})$.

— La probabilité $P_X$ est appelée **loi de probabilité de la variable aléatoire** $X$.

— On dit de deux variables aléatoires $X$ et $Y$ qu'elles sont **équiréparties** lorsqu'elles ont la même loi : $P_X = P_Y$. On note alors $X \sim Y$. **Attention !** On peut avoir $X \sim Y$ mais avec $X \neq Y$.

## Couple de variables aléatoires.

— Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E$, alors $X = (X_1, X_2) : \Omega \to E^2$ définie par $X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E^2$.

— **Loi conjointe.** On appelle **loi conjointe de** $X_1$ **et** $X_2$ la loi $P_X = P_{(X_1,X_2)}$. Elle est déterminée par : $\forall (x_1, x_2) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega), P_X(x_1, x_2) = P(X = (x_1, x_2)) = P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2))$.

— **Lois marginales.** On appelle **lois marginales du couple** $(X_1, X_2)$ les lois $P_{X_1}$ et $P_{X_2}$ définies sur $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$ par : $\forall x \in X_1(\Omega), P_{X_1}(x) = P(X_1 = x) = \displaystyle\sum_{y \in X_2(\Omega)} P_X(x, y)$ et $\forall y \in X_2(\Omega), P_{X_2}(y) = \displaystyle\sum_{x \in X_1(\Omega)} P_X(x, y)$.

## Loi conditionnelle.

— Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires discrètes réelles. On considère $x \in \mathbb{R}$ tel que l'événement $P(X = x) > 0$ et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

— L'application $P_{(X=x)} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que $A \longmapsto P_{(X=x)}(Y \in A) = \dfrac{P((X = x) \cap (Y \in A))}{P(X = x)}$ est une probabilité.

— On appelle cette probabilité **loi conditionnelle de** $Y$ **sachant** $(X = x)$.

## Variables aléatoires indépendantes.

— On dit que les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **indépendantes** lorsque pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), (X_2 = x_2), ..., (X_n = x_n)$ sont indépendants.

— Dans ce cas, $P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.

— Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** et que $X = (X_1, X_2)$, alors : $\forall (x_1, x_2) \in X(\Omega), P_X(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2)$.

— La suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles **indépendantes** ssi pour tout $n \geqslant 1$, les variables aléatoires $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes.

## Fonction d'une variable aléatoire.

— Soient $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète et $f : X(\Omega) \to F$, alors $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $F$. On la note $f(X)$.

— Soient $X_1, X_2, ... X_n$ des variables aléatoires discrètes indépendantes, $f$ et $g$ deux fonctions et $m \in \{1, 2, ..., n-1\}$, alors $f(X_1, X_2, ..., X_m)$ et $g(X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

## Compléments sur les lois usuelles.

— **Loi géométrique de paramètre** $p \in ]0,1[$**.** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$. On note $X \sim \mathcal{G}(p)$. Le rang du premier succès d'une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

— $X$ suit une loi géométrique ssi $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, P(X > n + m | X > n) = P(X > m)$ (loi sans mémoire).

— Si $\forall n \in N$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $(np_n) \to \lambda$, alors $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) \to e^{-\lambda} \lambda^k / k!$ (Poisson = événements rares).