# Formulaire de Mathématiques

OPTIMAL SUP-SPÉ
le n°1 en sup-spé

Maths SUP - Concours 2015

Ce formulaire de mathématiques vous est offert par Optimal Sup-Spé. Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques sur les premiers chapitres de l'année scolaire.

**Point méthode**

**Recevez le formulaire complet.**

Ce formulaire est distribué à tous nos élèves de cycle continu et de stages intensifs. Optimal Sup Spé vous offre à tous un extrait découverte. Vous pouvez aussi obtenir le formulaire gracieusement sur demande en contactant l'équipe pédagogique au 01 40 26 78 78.

# Equations différentielles

## Méthodes importantes.

**D'une solution particulière à la solution complète.** Si $(L)$ est une équation linéaire, d'équation homogène associée $(H)$, et si $f_0$ est une solution particulière de $(L)$, alors ($f$ est solution de $(L)$) $\Leftrightarrow$ ($f - f_0$ est solution de $(H)$).

**Méthode de variation de la constante.** On conserve les notations précédentes. But : trouver une solution particulière de $(L)$. On trouve la solution générale de $(H)$. On considère une solution particulière de $(H)$, notée $g_0$, qui ne s'annule pas. Puis on cherche à quelle condition la fonction $f_0 : t \to \lambda(t)g_0(t)$ est solution de $(L)$.

**Principe de superposition des solutions.** But : trouver une solution particulière de $(L)$. Si le second membre d'une équation $(L)$ est une somme de fonctions, on cherche des solutions particulières pour chacune des équations induites. La superposition (i.e. la somme) de toutes les solutions particulières est une solution particulière de $(L)$.

## Résolution des équations au programme sur un intervalle $I$.

**Equation $y' + ay = 0$.** $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{-}A(t)$, où $A$ est une primitive de la fonction $a$, et où $\lambda$ décrit $\mathbb{R}$.

**Solution particulière de l'équation $y' + ay = p$,** où p est un polynôme. Deux cas se présentent :

— Si $a \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n$.
— Si $a = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.

**Solution particulière de l'équation $y' + ay = p(t)e^{mt}$,** où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. Deux cas se présentent :

— Si $a \neq m,\ \deg q = n$.
— Si $a = m,\ \deg q = n + 1$.

**Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où $a$, $b$, $c$ sont réels.** On considère le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta > 0$, $(E)$ admet deux solutions réelles notées $x_1$ et $x_2$ ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée $x_0$ ; si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Trois cas se présentent :

— Si $\Delta > 0$ : $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où $(\lambda, \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta = 0$ : $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où $(\lambda, \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta < 0$ : $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, où $(\lambda, \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

**Equation $ay'' + by' + cy = 0$, cas où $a$, $b$, $c$ sont complexes.** On considère le discriminant $\Delta$ de l'équation caractéristique $(E) : ar^2 + br + c = 0$. Si $\Delta \neq 0$, $(E)$ admet deux solutions complexes conjuguées notées $x_1$ et $x_2$ ; si $\Delta = 0$, une unique solution notée $x_0$. Deux cas se présentent :

— Si $\Delta \neq 0$ : $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t}$, où $(\lambda, \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.
— Si $\Delta = 0$ : $ay'' + by' + cy = 0 \Leftrightarrow \forall t \in I,\ y(t) = (\lambda + \mu t)e^{x_0 t}$, où $(\lambda, \mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$.

**Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p$,** où p est un polynôme. Trois cas se présentent :

— Si $c \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n$.
— Si $c = 0$ et $b \neq 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 1$.
— Si $b = c = 0$, l'équation admet une solution polynomiale de degré $n + 2$.

**Solution particulière de l'équation $ay'' + by' + cy = p(t)e^{mt}$,** où p est un polynôme. L'équation admet une solution particulière de la forme $t \mapsto q(t)e^{mt}$. En notant $(E)$ l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, trois cas se présentent :

— Si $m$ n'est pas racine de $(E)$, $\deg q = n$.
— Si $m$ est racine simple $(E)$, $\deg q = n + 1$.
— Si $m$ est racine double $(E)$, $\deg q = n + 2$.