Formulaire de Mathématiques

OPTIMAL SUP-SPÉ
le n°1 en sup-spé

Maths SUP - Concours 2015

Ce formulaire de mathématiques vous est offert par Optimal Sup-Spé. Retrouvez ci-dessous les théorèmes et les formules les plus importants de votre cours de mathématiques sur les premiers chapitres de l'année scolaire.

Point méthode

Recevez le formulaire complet.

Ce formulaire est distribué à tous nos élèves de cycle continu et de stages intensifs. Optimal Sup Spé vous offre à tous un extrait découverte. Vous pouvez aussi obtenir le formulaire gracieusement sur demande en contactant l'équipe pédagogique au 01 40 26 78 78.

Nombres complexes

Exponentielle complexe. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Les deux écritures d'un nombre complexe non nul.

— $z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$.
— $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta} = r\cos\theta - i\,r\sin\theta$. $z\overline{z} = |z|^2$.
— $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r+a}$.

Inégalité triangulaire. $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Formule de Moivre. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. En particulier :

— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\cos n\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$.
— $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\sin n\theta = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^n\right)$.

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

— $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.
— $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Fonction exponentielle complexe. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^{\mathrm{Re}\,z} e^{i\,\mathrm{Im}\,z}$. Pour tous complexes z et z' :

— $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.
— $\dfrac{1}{expz} = \exp(-z)$.
— $\overline{z} = \exp(\bar{z})$.
— $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z = z' \equiv 2i\pi$.

Groupe $(\mathbb{U}, \times)$. On note : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.\}$. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Racines n^{iemes} de l'unité, groupe $(\mathbb{U}_n, \times)$. Avec $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de 1 est l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{\omega^k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [\![\, 0\,,\, n-1\,]\!]\right\}$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Si z est racine de l'unité, $\overline{z}$ l'est aussi.
— **Somme.** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0$.
— **Produit.** $\prod\limits_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (-1)^{n-1}$.

Racines n^{iemes} d'un complexe non nul. Avec $n \geqslant 2$ et $z = re^{i\theta}$:

— **Racines.** L'ensemble des racines n^{iemes} de z est l'ensemble $\left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right\}$.
— **Somme.** La somme des racines n^{iemes} de z vaut 0.
— **Produit.** Le produit des racines n^{iemes} de z vaut $(-1)^{n-1}z$.