SUITES RÉELLES

Suites arithmétiques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = u_p + (n-p)r$,
- $\forall n \geqslant p, \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\dfrac{u_p+u_n}{2}$.

Suites géométriques. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q à partir du terme u_p, alors :
- $\forall n \geqslant p, u_n = q^{n-p}u_p$,
- Si $q \neq 1$: $\forall n \geqslant p, \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Définition de la convergence. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Suite de Cauchy. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_0, |u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$.

Théorème de convergence les plus importants.
- **Théorème de la limite monotone.** Toute suite croissante admet une limite finie ou égale à $+\infty$. Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure. Résultats analogues pour les suites décroissantes.
- **Théorème de l'encadrement.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
- **Théorème de prolongement des inégalités.** Si à partir d'un certain rang : $u_n \leqslant v_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors : $\ell \leqslant \ell'$.

Comparaison de suites.
- **Suites négligeables.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n = o(v_n)$, si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = \varepsilon_n v_n$, où : $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- **Suites équivalentes.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'on note $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = o(v_n)$, i.e. si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n = h_n v_n$, où : $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Equivalents usuels. Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors :
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$,
- $\sin u_n \sim u_n$,
- $\cos u_n - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.

Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, alors :
- Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone : croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante dans le cas contraire.
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires.
- Si f change de variations, on peut se ramener à un intervalle I stable par f contenant tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, sur lequel f soit monotone.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et si f est **continue** en ℓ, alors : $\ell = f(\ell)$.

Sommes de RIEMANN. Si f est continue sur $[a,b]$, alors :
- $s_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.