Formulaire Systèmes, Matrices : l'essentiel en une page

Notations. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau non commutatif (i.e. : il existe A et B telles que $AB \neq BA$), et non intègre (i.e. il existe A et B non nulles telles que $AB = 0$).

Produit. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, alors, en notant $C = AB = (c_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $\forall (i,j) \in [\![1\,,\, n]\!] \times [\![1\,,\, p]\!], c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$.

Formule du binôme. $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \underline{AB = BA}, \forall n \in \mathbb{N}, (A+B)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

Systèmes linéaires. Soit $(S) : AX = B$ un système linéaire d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

- (S) est *homogène* si $B = 0$.
- (S) est *compatible* s'il admet au moins une solution.
- (S) est *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions.
- (S) est *impossible* s'il n'admet aucune solution.
- (S) est *de* Cramer s'il admet une unique solution.

Transformations élémentaires. Les transformations élémentaires suivantes transforment un système (resp. une matrice carrée) en un système équivalent (resp. une matrice équivalente) :

- l'ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, où $\lambda \in \mathbb{K}$).
- la multiplication d'une ligne par une constante non nulle ($L_i \leftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$).
- l'échange de deux lignes : ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Transposée. ${}^t\!A$ est la matrice obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Matrices inversibles : définition. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I$.

Matrices inversibles : caractérisations. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si l'une de ces conditions équivalentes est réunie :

- $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB = I$ ou $BA = I$.
- il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A menant à une matrice inversible (en particulier : à une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls).
- A est la matrice représentative d'un isomorphisme.
- A est un produit de matrices inversibles (et on a alors, si $A = PQ$: $A^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.)
- ${}^t\!A$ est inversible (et on a alors : $\left({}^t\!A\right)^{-1} = {}^t\!A^{-1}$.
- A est une matrice de passage.
- pour toute matrice colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ est de Cramer.
- le système $AX = 0$ admet $X = 0$ pour unique solution.
- $\det A \neq 0$ (voir le Formulaire **Déterminants**).

Rang d'une matrice. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Le rang de A est le nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice A (matrice obtenue par suite de transformations élémentaires selon la méthode de Gauss, voir exemples vus en classe)
- Si A représente un endomorphisme f, alors : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f$.
- $\operatorname{rg} {}^t\!A = \operatorname{rg} A$.
- Les transformations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de A conservent le rang de A - et, en particulier, son caractère inversible ou non, s'il s'agit d'une matrice carrée.