Probabilités sur un univers fini

On se place dans un espace probabilisé (Ω, P).

Evénements incompatibles.

- A et B sont incompatibles si : $A \cap B = \varnothing$.
- Si $A_1, A_2, \dots A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors : $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Système complet. $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements si :

- $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$,
- $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Probabilité uniforme. En situation d'équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\mathrm{card} A}{\mathrm{card} \Omega}$.

Probabilité conditionnelle. Si $P(B) \neq 0$: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Formule des probabilités conditionnelles. Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors : $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1}}(A_n)$.

Formule des probabilités totales. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle, alors : $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B) P(A_i)$.

Formule de Bayes. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est un système complet d'événements tous de probabilité non nulle et si $P(B) \neq 0$, alors : $\forall i \in I,\ P_B(A_i) = \dfrac{P_{A_i}(B) P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P_{A_i}(B) P(A_i)}{\sum_{k \in I} P_{A_k}(B) P(A_k)}$.

Evénements indépendants, deux à deux indépendants, mutuellement indépendants.

- A et B sont indépendants pour la probabilité P si : $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.
- $A_1, A_2, \dots A_n$ sont deux à deux indépendants si la probabilité de l'intersection de deux événements distincts parmi eux est égale au produit des deux probabilités correspondantes.
- $A_1, A_2, \dots A_n$ sont mutuellement indépendants si la probabilité de l'intersection de n'importe quels événements distincts parmi eux est égale au produit des probabilités correspondantes.
- L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux. La réciproque est fausse.