Intégration sur un segment : l'essentiel en une page

Définition théorique. L'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est définie comme la valeur commune de (1) : la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f, et (2) : la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f.

Primitive et Intégrale. Toute fonction continue sur $[a,b]$ y admet une primitive, notée F. $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Toute fonction de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, où $a \in \mathbb{R}$, est une primitive de f s'annulant en a. Si f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriétés de l'intégration. f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$.

- **Chasles.** $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Linéarité.** $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Positivité.** Si $a \leqslant b$: si f est positive, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- **Croissance.** Si $a \leqslant b$: si $\forall t \in [a,b], f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- **Intégrale nulle.** Si f est continue et positive sur $[a,b]$: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0$.

Intégration par parties. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Changement de variable.

- "$u = \varphi(t)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$.
- "$t = \varphi(u)$". Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$, avec $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Sommes de Riemann. Si f est continue sur $[a,b]$, alors :

- $s_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

En particulier pour $a = 0$ et $b = 1$: $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Valeur moyenne. $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$. $\exists c \in]a,b[$, $\mu = f(c)$.