SÉRIES RÉELLES

DEUXIÈME ANNÉE - FILIÈRE MP/MP* - CONCOURS 2016

Fiche de cours complète

1. Généralités

Suite des sommes partielles. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite des sommes partielles associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Remarque
Comme dans la fiche de cours sur les suites, nous considérons, dans tout le cours, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée sur $\mathbb{N}$. Le soin est laissé au lecteur d'adapter toutes les notations et propriétés au cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indexée sur $\mathbb{N}^*$, ou plus généralement pour une suite définie à partir d'un certain rang n_0.

Série. On appelle série de terme général u_n, le couple de suites $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Définition de la convergence. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque
La définition de la série comme un couple de deux suites est technique, et en pratique, pas vraiment utilisée en exercice. En pratique, pour étudier une série, on se ramène le plus souvent à l'étude de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il n'en reste pas moins que la série et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont "techniquement" deux objets mathématiques distincts. Il ne faut donc pas écrire des phrases comme : "la série de terme général u_n est croissante", mais plutôt "la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante", etc.

Condition suffisante de convergence. Si la série de terme général u_n converge, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

Somme d'une série convergente. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la série de terme général u_n converge *vers* $\ell \in \mathbb{R}$, alors ce nombre ℓ est appelé la somme de la série de terme général u_n : on dit alors que "la série de terme général u_n converge *de somme* ℓ".

On note alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \ell.$$

Attention !

La notation $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ne désigne pas la série, mais sa somme uniquement en cas de convergence. Elle ne doit pas être employée pour une série dont on ne sait pas si elle converge ou non, ou pire encore, pour une série divergente. Ainsi, il ne faut pas écrire : "la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge" (cette somme de série n'existe pas !), mais "la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge".

Propriétés. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, telles que les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n convergent. Alors, pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge, et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Théorème de comparaison de séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles à termes positifs.

Critère de majoration. Si : $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, alors :

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Critère de négligeabilité. Si : $u_n = o(v_n)$, alors :

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge.

Critère d'équivalence. Si : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature.

3. Séries classiques à connaître

Série géométrique. Soit $q \in \mathbb{R}$. On appelle série géométrique, la série de terme général q^n. La série de terme général q^n converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Série géométrique "dérivée". Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général nq^{n-1} ("série géométrique dérivée") converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Série géométrique "dérivée deuxième". Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général $n(n-1)q^{n-2}$ ("série géométrique dérivée deuxième") converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et on a alors :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Série géométrique "dérivée r-ème". Soient $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. la série de terme général $n(n-1)\dots(n-r+1)q^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!}q^{n-r}$ ("série géométrique dérivée r-ème") converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et on a alors :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-r+1)q^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{n!}{(n-r)!}q^{n-r} = \frac{r!}{(1-q)^{r+1}}.$$

En particulier :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Série exponentielle. Pour tout réel x, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ ("série exponentielle") converge, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Séries de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ (série de Riemann) converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. En particulier :

— La série de terme général $\frac{1}{n}$ (également appelée "série harmonique") diverge.

— La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

4. Séries absolument convergentes

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente si la série de terme général $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Théorème. Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

Attention !

Il existe des séries convergentes mais non absolument convergentes, comme c'est le cas, par exemple, de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ (série dite "harmonique alternée"). Ces séries sont appelées "semi-convergentes". L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme en filière BCPST.

Conservation de la somme par permutation des termes. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série de terme général u_n soit absolument convergente. Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ (i.e. toute bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même), la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$