Chapitre 6. Applications linéaires

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

I. Applications linéaires

1. Applications linéaires

■ Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application de E dans F. φ est une application linéaire de E dans F, et on note $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ si :

– $\forall (u, v) \in E^2$, $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$,
– $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E$, $\varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(u)$ (φ est homogène par rapport aux scalaires).

■ Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si φ est une application linéaire de E dans F, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{K}^n, \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(u_i).$$

2. Noyau et image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F.

■ ***Noyau.*** On appelle noyau de φ et on le note $\operatorname{Ker}\varphi$, l'ensemble $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \,/\, \varphi(x) = 0_F\}$.

- $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E,
- φ est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$.

■ ***Image.*** On appelle image de φ et on le note $\operatorname{Im}\varphi$, l'ensemble $\operatorname{Im}\varphi = \varphi(E) = \{y \in F \,/\, \exists x \in E, y = \varphi(x)\}$.

- $\operatorname{Im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F,
- φ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}\varphi = F$.

3. Composée de deux applications linéaires

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, φ une application linéaire de E dans F (i.e. $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$) et ψ une application linéaire de F dans G (i.e. $\psi \in \mathscr{L}(F, G)$). $\psi \circ \varphi$ est une application linéaire de E dans G.

4. Structures d'ensembles d'applications linéaires

■ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- f est une forme linéaire sur E si et seulement si f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$,
- f est un isomorphisme de E dans F si et seulement si f est une application linéaire bijective de E dans F,
- f est un endomorphisme de E si et seulement si f est une application linéaire de E dans E,
- f est un automorphisme de E si et seulement si f est une application linéaire bijective de E dans E.

On note :
- $\mathscr{L}(E, F)$, l'ensemble des applications linéaires de E dans F,
- $\mathscr{L}(E)$, l'ensemble des endomorphismes de E,
- $GL(E)$, l'ensemble des automorphismes de E.

■ $(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ et $(\mathscr{L}(E), +, \cdot)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. De plus, si E et F sont de dimensions finies respectives n et p ($(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$), $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{L}(E)$ sont de dimensions finies respectives np et n^2.

■ $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif).

5. Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

■ Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E, et $(f_i)_{1\leq i\leq p}\in F^p$. Il existe une et une seule application linéaire φ de E dans F telle que : $\forall i\in [1, p]$, $\varphi(e_i) = f_i$. On a alors : $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x\in E, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;/ \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = 0\}$ et : $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left((f_i)_{1\leq i\leq p}\right)$.

■ ***Conséquence :*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de $\mathbb{K}^p$ et $(f_i)_{1\leq i\leq p}\in E^p$. Il existe une et une seule application linéaire φ de $\mathbb{K}^p$ dans E telle que : $\forall i\in [1, p]$, $\varphi(e_i) = f_i$.

II. Image et formule du rang

■ ***Image.*** Soient $n\in\mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\varphi\in\mathscr{L}(E, F)$. On a : $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(\left(\varphi(e_i)\right)_{1\leq i\leq n}\right)$.

■ ***Formule du rang.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi\in\mathscr{L}(E, F)$. On a :
- φ définit un isomorphisme de tout supplémentaire de Ker u sur Im u (i.e. la restriction de φ à tout supplémentaire de Ker u dans Im u est un isomorphisme).
- En particulier : $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \dim E$.

■ ***Conséquences :***
- Soit E un espace vectoriel de dimension finie. H est un hyperplan de E si, et seulement si, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $\varphi\in\mathscr{L}(E, F)$. φ est injective si, et seulement si, φ est surjective (donc bijective).

III. Caractérisation des isomorphismes, espaces isomorphes

■ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et φ une application linéaire de E dans F. φ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement s'il existe une application linéaire ψ de F dans E telle que : $\begin{cases}\forall x\in E, \psi\circ\varphi(x) = x\\ \forall y\in F, \varphi\circ\psi(y) = y\end{cases}$, i.e. telle que $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_E$ et $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_F$. En particulier, si E = F, φ est un automorphisme de E si, et seulement s'il existe un endomorphisme de E tel que : $\psi\circ\varphi = \varphi\circ\psi = \mathrm{id}_E$.

■ Si f est un isomorphisme de E dans F alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E et f^{-1} est appelé isomorphisme réciproque de f.

■ Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, φ un isomorphisme de E dans F et ψ un isomorphisme de F dans G. $\psi\circ\varphi$ est un isomorphisme de E dans G, et l'on a alors : $(\psi\circ\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\circ\psi^{-1}$.

Cas particulier. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n, $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\varphi\in\mathscr{L}(E, F)$. φ est bijective si et seulement si la famille $\left(\varphi(e_i)\right)_{1\leq i\leq n}$ forme une base de F.

■ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme φ de E sur F.

Propriétés :
- un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de dimension n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$,
- deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.

IV. Sommes, sommes directes

▪ ***Caractérisation matricielle des endomorphismes de E stabilisant les sous-espaces $(F_i)_{1 \le i \le p}$.*** Soient p un entier naturel non nul, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p = E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $i \in [1, p]$, F_i est stable par f (i.e. $\forall i \in [1, p]$, $f(F_i) \subset F_i$) si et seulement si, dans une base de E formée par juxtaposition des bases des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{1 \le i \le p}$, la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 & \\ & \boxed{A_2} & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{}_{\dim F_1} \underbrace{}_{\dim F_2} \quad \underbrace{}_{\dim F_p}$$

V. Projecteurs, symétries, homothéties et affinités

1. Projecteurs

▪ ***Définition.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $\forall u \in E$, $\exists!(u_1, u_2) \in (F_1, F_2)$, $u = u_1 + u_2$. L'application $p : \begin{vmatrix} E \to E \\ u \mapsto u_1 \end{vmatrix}$ est un endomorphisme de E, appelé projecteur (ou projection) sur F_1 parallèlement à F_2 ou projecteur sur F_1 de direction F_2.

Propriétés :

- $\operatorname{Ker} p = F_2$,
- $\operatorname{Im} p = F_1$,
- $\operatorname{Ker}(p - id) = F_1$,
- $p \circ p = p$,
- $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$.

▪ ***Caractérisation.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. p est un projecteur si, et seulement si : $p^2 = p$ (où : $p^2 = p \circ p$).

2. Symétries

▪ ***Définition.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $\forall u \in E$, $\exists!(u_1, u_2) \in (F_1, F_2)$, $u = u_1 + u_2$. L'application $s : \begin{vmatrix} E \to E \\ u \mapsto u_1 - u_2 \end{vmatrix}$ est un endomorphisme de E, appelé symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.

Propriétés :

- $\operatorname{Ker}(s - Id_E) = F_1$,
- $\operatorname{Ker}(s + Id_E) = F_2$,
- $s^2 = id_E$ (avec : $s^2 = s \circ s$), donc s est un automorphisme de E.

▪ ***Caractérisation.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $s \in \mathcal{L}(E)$. s est une symétrie si, et seulement si : $s^2 = id_E$ (où : $s^2 = s \circ s$).

3. Homothéties

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $h : \begin{vmatrix} E \to E \\ u \mapsto \lambda u \end{vmatrix}$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.

4. Affinités

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On a : $\forall u \in E, \exists! (u_1, u_2) \in (F_1, F_2), u = u_1 + u_2$. L'application a : $\left| \begin{array}{l} E \to E \\ u \mapsto u_1 + \lambda u_2 \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E appelé affinité de rapport λ par rapport à F_1 parallèlement à F_2.

Propriété : En notant p le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2, on a : $a = \lambda \mathrm{id}_E + (1 - \lambda)p$.

VI. Matrice représentative d'une application linéaire

▪ ***Matrice représentant une application linéaire.*** Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le p}$ une base de E, $\mathcal{B}' = (f_i)_{1 \le i \le n}$ une base de F et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

La matrice M représentative de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice représentant la famille de vecteurs $(\varphi(e_i))_{1 \le i \le p}$ dans la base $\mathcal{B}'$. De plus, si X est la colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur x de E, alors MX est la colonne des coordonnées de f(x) dans $\mathcal{B}'$.

▪ ***Cas des endomorphismes.*** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. On appelle matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$ la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

▪ ***Cas des formes linéaires.*** Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et si f est une forme linéaire sur E, alors la matrice représentative de f relativement à une base de E et à une base de $\mathbb{K}$ est une matrice ligne.

▪ Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies admettant $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ pour bases respectives, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Si la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est M et si la matrice de g relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ est N, alors NM est la matrice de $g \circ f$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}''$.

▪ ***Propriétés.***

- Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de même dimension finie, si f est une application linéaire de E dans F et si M est la matrice de f relativement à deux bases données $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et de F, alors f est bijective de E sur F si, et seulement si M est inversible, et la matrice M^{-1} est alors la matrice représentative de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ de F et E.
- Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, de dimension finie n ($n \in \mathbb{N}^*$), représenté par une matrice M dans une base $\mathcal{B}$ de E, alors si $P \in \mathbb{K}[X]$: $(P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow P(f) = \theta$, où $\theta = 0_{\mathcal{L}(E)})$.

VII. Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice

1. Rang d'une application linéaire

▪ ***Définition.*** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle rang de φ la dimension de $\mathrm{Im}\,\varphi$, et on note : $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$.

▪ *Cas particulier.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E et F sont de même dimension finie, alors φ est un isomorphisme de E sur F si, et seulement si : $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim E$.

2. Rang d'une matrice

▪ Soient n et p deux entiers naturels non nuls, E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives n et p, $(e_i)_{1 \le i \le n}$ une base de E, $(f_i)_{1 \le i \le p}$ une base de F, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et A la matrice représentative de φ dans les bases $(e_i)_{1 \le i \le n}$ et $(f_i)_{1 \le i \le p}$. On appelle rang de A, le rang de φ, et on note : $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,\varphi$.

VIII. Programme officiel

Hors programme :

Applications affines, projections affines, symétries affines, homothéties affines et affinités affines d'un espace vectoriel quelconque (certaines de ces notions sont au programme en géométrie mais seulement dans le cas où l'espace vectoriel considéré est le plan ou l'espace).

Chapitre 6. Applications linéaires

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

Dans toute la fiche méthodologique, sauf indication contraire, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

0. Apprendre et comprendre son cours

Attention aux mauvais réflexes en algèbre : par exemple, si f et g sont des endomorphismes définis sur un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 1 ou infinie, l'égalité $f \circ g = 0$ n'implique aucunement la nullité de l'une des applications f et g.

Attention également aux notations : par exemple, si $n \geq 2$ et si f est un endomorphisme, f^n désigne $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois), et non la fonction "f puissance n" comme en analyse (cette notation est généralement précisée dans les en-têtes des sujets de concours, mais il vaut mieux la connaître).

De façon générale, il faut faire attention à ne pas considérer comme acquise sur une application linéaire définie sur E une propriété familière sur les fonctions numériques réelles ou complexes.

I. Linéarité, noyau et image

1. Montrer qu'une application est linéaire

Pour montrer qu'une application f de E dans F est linéaire on peut :

– revenir à la définition,

– montrer que f est une application linéaire usuelle (projecteur, symétrie, homothétie, affinité),

– montrer que f est une combinaison linéaire d'applications linéares ($\mathcal{L}(E, F)$ étant un espace vectoriel),

– montrer que f est la composée d'application linéaires (attention aux espaces de départ et d'arrivée des fonctions, par exemple pour f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$ où $E \neq F$, $f \circ g$ n'a pas de sens).

☞ Voir les exercices "Notions élémentaires", "Les incontournables", "Étude d'applications de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$", "Étude d'applications définies sur $\mathbb{K}[X]$", "Étude d'applications définies sur un espace vectoriel de fonctions continues".

2. Déterminer le noyau d'une application linéaire

Pour déterminer le noyau d'une application f linéaire définie sur E (ce qui revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$ dans E), on peut raisonner par équivalence :

– soit en considérant l'équation $f(x) = 0$ (si on connaît une base de E, on peut décomposer x dans cette base),

– soit, si E est de dimension finie, en déterminant une matrice M représentative de f puis en résolvant l'équation $MX = 0$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss (on effectuera alors une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de M afin d'en déterminer une matrice triangulaire équivalente puis on résoudra le système).

Attention, lorsque qu'on résout l'équation $f(x) = 0$, il arrive qu'on ne conserve pas l'équivalence dans le calcul. On trouve ainsi des conditions nécessaires que doivent vérifier les éléments du noyau. Il faut alors vérifier si ces éléments sont bien dans le noyau (réciproque), sauf si la condition trouvé est $x = 0$ (le noyau est un espace vectoriel donc il contient 0).

Remarque : le noyau d'une application linéaire n'est jamais vide, car il contient au moins le vecteur nul.

☞ Voir l'exercice "Les incontournables".

3. Déterminer l'image d'une application linéaire

Précisions tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : confondre Im f et l'ensemble d'arrivée de f. Pour déterminer l'image d'une application f linéaire définie sur E (ce qui revient à déterminer l'ensemble des vecteurs f(x), où x décrit E) on peut :

– déterminer l'image par f des vecteurs d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E ; la famille ainsi constituée formant une famille génératrice de Im f, on peut alors écrire Im f = $\mathcal{V}ect\left((f(e_i))_{1\leq i\leq n}\right)$,

– déterminer, si E et F sont de même dimension finie, une matrice M représentative de f sur laquelle on effectuera une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes afin d'obtenir une matrice équivalente dont les colonnes non nulles forment une famille libre ; les vecteurs de E représentés par ces colonnes forment alors une base de Im f.

Dans le cas d'une application bijective ou surjective, Im f vaut l'ensemble d'arrivée de f.

II. Injectivité, surjectivité, bijectivité

1. Montrer qu'une application linéaire est injective

Précisons tout d'abord que si E et F sont de dimension finie, une application linéaire f de E dans F ne peut être injective que si la dimension de E est inférieure ou égale à celle de F.

Pour montrer qu'une application f linéaire de E dans F est injective, on peut :

– montrer que : Ker f = {0} (voir point I.2 ci-dessus). Cependant, en fonction de la nature de l'espace vectoriel E, on pourra également se reporter aux chapitres concernés (sur les polynômes si $E \subset \mathbb{R}[X]$, sur les fonctions si $E \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, etc.),

– montrer que f est bijective,

– utiliser la définition (rare),

– si E est de dimension finie, montrer que l'image par f d'une base de E est une famille libre de F (rare).

☞ Voir l'exercice "Polynômes d'endomorphismes".

2. Montrer qu'une application linéaire est surjective

Précisons tout d'abord que si E et F sont de dimension finie, une application linéaire f de E sur F ne peut être surjective que si la dimension de E est supérieure ou égale à celle de F.

Pour montrer qu'une application f linéaire de E dans F est surjective, on peut :

– montrer que : Im f = F (voir point I.3 ci-dessus),

– si E et F sont de dimension finie, montrer que la famille constituée par les images des vecteurs d'une base de E est une famille génératrice de F,

– montrer que f est bijective,

– utiliser la définition en montrant que tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E.

3. Montrer qu'une application linéaire est bijective

Se souvenir que si E et F sont de même dimension finie, une application linéaire f de E dans F est bijective si, et seulement si, elle est injective **ou** surjective.

Pour montrer qu'une application f linéaire de E sur F est bijective, on peut :

– si E et F sont de même dimension finie, montrer que f est injective **ou** que f est surjective,

– si E et F sont de même dimension finie, exhiber une matrice représentative à f et montrer qu'elle est inversible (voir fiche

méthodologique "**Calcul matriciel**"),
– exhiber une application linéaire g telle que : $f \circ g = Id = g \circ f$ (une seule des deux égalités étant suffisante si E et F sont de dimension finie),
– utiliser la définition en montrant que tout élément de F admet un unique antécédent par f dans E.

Réciproquement, pour résoudre une question du type "montrer que $\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y$", si E et F sont des espaces vectoriels de même dimension finie, il peut être judicieux d'introduire une application linéaire f de E dans F puis de montrer que f est un isomorphisme.

☞ Voir l'exercice "Étude d'applications de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}^n$"

III. Applications particulières

1. Montrer qu'une application est un endomorphisme, un isomorphisme ou un automorphisme

Se souvenir que :
– un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E,
– un isomorphisme de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F (pour la bijectivité, voir point II.3 ci-dessus),
– un automorphisme de E est une application linéaire bijective de E dans E (pour la bijectivité, voir point II.3 ci-dessus).

2. Montrer qu'une application linéaire est un projecteur ou une symétrie

Pour montrer qu'une application **linéaire** p (resp. s) est un projecteur (resp. une symétrie), on peut :
– montrer qu'elle vérifie la relation $p \circ p = p$ (resp. $s \circ s = Id$) (caractérisation),
– utiliser la définition, en exhibant deux sous espaces vectoriels supplémentaires sur lesquels p (resp. s) possède les propriétés qui définissent un projecteur (resp. une symétrie).

3. Montrer qu'une application linéaire est une homothétie

Pour montrer qu'un endomorphisme h de E est une homothétie de rapport λ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$), on peut :
– utiliser la définition,
– si E est de dimension finie, montrer que dans une base de E (ou dans toute base de E), la matrice représentative de h est de la forme λI.

4. Montrer qu'une application linéaire est une affinité

Précisons tout d'abord qu'un affinité (sous-entendu : affinité linéaire) n'est pas une application affine. Pour montrer qu'une application **linéaire** a est une affinité, on peut :
– utiliser la définition en exhibant deux sous espaces vectoriels supplémentaires sur lesquels a possède les propriétés qui définissent une affinité,
– montrer que a est une combinaison linéaire d'un projecteur et d'une homothétie, le rapport de l'affinité était alors égal à celui de l'homothétie considérée.

☞ Voir l'exercice "Propriétés des projecteurs".

IV. Matrice représentative, rang d'une application linéaire

1. Déterminer la matrice représentative d'une application linéaire

Si f est une application linéaire de E dans F, pour déterminer la matrice représentative de f d'une base $(e_i)_{1\le i\le n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ de E dans une base $(f_i)_{1\le i\le p}$ $(p\in\mathbb{N}^*)$ de F, il suffit d'écrire, en colonnes, les coordonnées des vecteurs $(f(e_i))_{1\le i\le n}$ dans la base $(f_i)_{1\le i\le p}$.

En particulier, pour déterminer la matrice représentative d'un endomorphisme f de E dans une base $\mathcal{B}$ de E, il suffit d'écrire, en colonnes, les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Penser qu'une application linéaire f admet une infinité de matrices représentatives, qui dépendent uniquement des bases dans lesquelles on choisit de représenter f.

☞ Voir l'exercice "Étude d'applications définies sur $\mathbb{R}[X]$".

2. Déterminer le rang d'une application linéaire

Pour déterminer le rang d'une application linéaire f de E dans F (i.e. la dimension de Im f), on peut :

– si E et F sont de dimensions finies, déterminer une matrice M représentative de f puis déterminer le rang de M (voir chapître "**Calcul matriciel**"),

– si E est de dimension finie, chercher la dimension du noyau de f puis utiliser le théorème du rang.

☞ Voir le chapitre "**Calcul matriciel**".

V. Formes linéaires

1. Montrer qu'un application linéaire f est une forme linéaire.

Pour montrer qu'un application linéaire f définie sur E est une forme linéaire, on peut :

– utiliser la définition en montrant que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$),

– si $(E, <.>)$ est un espace euclidien (i.e. un espace préhilbertien réel de dimension finie), montrer qu'il existe $a\in E$ tel que : $\forall x\in E,\ f(x) = <a, x>$.

2. Image d'une forme linéaire

Se souvenir que l'image d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), est égale à $\mathbb{K}$ (puisque incluse dans $\mathbb{K}$ et de même dimension), et qu'ainsi toute forme linéaire non nulle est surjective.

3. Noyau d'une forme linéaire

Se souvenir que le noyau d'une forme linéaire non nulle définie sur E est un hyperplan de E. De même, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan, il suffit d'exhiber une forme linéaire non nulle de définie sur E dont H est le noyau.

4. Montrer qu'une ou plusieurs formes linéaires vérifient certaines propriétés

Pour montrer qu'une forme linéaire non nulle définie sur E vérifie certaines propriétés, on peut considérer une base de son noyau, puis la compléter en une base de E (à l'aide du théorème de la base incomplète), et établir la propriété sur chacun des vecteurs de la base de E ainsi formée.

Pour montrer que plusieurs formes linéaires non nulles vérifient certaines propriétés, on peut employer la méthode ci-dessus pour chacune d'elles.

5. Intersection de noyaux de formes linéaires

Se souvenir que si $\varphi_1, \dots \varphi_q$ ($q \in \mathbb{N}^*$) sont des formes linéaires de E, la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq q}$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ si, et seulement si, $\bigcap_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} \varphi_i$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - q$.

Ce résultat est particulièrement utile pour résoudre les systèmes d'équations linéaires ou affines.