Chapitre 35. Probabilités sur un univers fini

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

Programme officiel : *"ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrements. Il a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines."*

Remarque : le programme de Maths Sup se limite au cas où l'univers Ω est fini. Les probabilités sont ainsi définies sur $\mathcal{P}(\Omega)$, les notions de tribus d'événements, σ-algèbres etc. étant hors-programme en première année (elles sont en revanche au programme en maths spé. De façon générale, toute approche théorique est exclue.

I. Expérience aléatoire, univers, événements

1. Expérience, résultats, événements

▪ ***Univers.*** L'ensemble Ω des issues possibles (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est appelé univers.

▪ ***Evénement.*** Si on effectue une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont l'univers associé est Ω, on dit qu'un **événement** est lié à l'expérience $\mathcal{E}$ si, après toute réalisation $\omega \in \Omega$ de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on sait dire si cet événement a lieu ou non. On convient d'identifier un événement à l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ pour lequel il a lieu, i.e. à une partie de Ω.

▪ ***Evénements remarquables.***

- Pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ est appelé **événement élémentaire**,
- Ω est appelé **événement certain**,
- $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.

2. Opérations sur les événements

▪ Soient A et B deux événements :

- l'événement "A ou B" s'écrit : $A \cup B$,
- l'événement "A et B" s'écrit : $A \cap B$,
- l'événement "non A" s'écrit : $\overline{A}$,
- l'événement "A mais pas B" s'écrit : $A \setminus B$.

▪ Soient I une partie de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements :

- l'événement "l'un au moins des événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$" s'écrit : $\bigcup_{i \in I} A_i$,
- l'événement "tous les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$" s'écrit : $\bigcap_{i \in I} A_i$.

■ ***Evénements incompatibles.*** Soient A et B deux événements. A et B sont dits incompatibles si "A et B" est un événement impossible, i.e. si $A \cap B = \varnothing$.

■ ***Inclusion.*** On dit que l'événement A est inclus dans l'événement B (et on note $A \subset B$) si la réalisation de l'événement A implique celle de l'événement B.

■ ***Egalité.*** On dit que l'événement A est égal à l'événement B si la réalisation de l'événement A équivaut à celle de l'événement B.

■ ***Monotonie d'une suite d'événements.*** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion si : $\forall n\in\mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$.
- On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion si : $\forall n\in\mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$.

3. Système complet d'événements

Soient I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie ou dénombrable d'événements. On dit que l'ensemble $\{A_i, i\in I\}$ forme un système complet d'événements si :

- $\forall i\in I, A_i \neq \varnothing$,
- $\forall (i, j)\in I^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing$,
- $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.

Remarque : $\{A_i, i\in I\}$ est une partition de Ω.

II. Probabilité

1. Définitions

■ ***Définition.*** Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité sur l'univers fini Ω toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$,
- Si A et B sont deux événements incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque : en maths spé, cette définition sera légèrement modifiée, les probabilités seront alors définies, plus généralement, sur une tribu de Ω.

■ **Détermination d'une probabilité par les images des singletons.** Soit Ω un univers fini de cardinal n ($n\in\mathbb{N}^*$). On note : $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Pour tout n-uplet $(p_i)_{1\le i\le n} \in [0, 1]^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, il existe alors une et une seule probabilité P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que : $\forall i\in [\![1, n]\!],\ P(\omega_i) = p_i$.

■ ***Probabilité uniforme (équiprobabilité).*** On appelle probabilité uniforme la probabilité P qui associe à chaque événement élémentaire le même nombre, i.e. : $\forall \omega\in\Omega, P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Propriété. Pour tout événement $A\in\mathcal{P}(\Omega)$, on a : $P(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

■ ***Espace probabilisé.*** Si P est une probabilité définie sur l'univers fini Ω, (Ω, P) est appelé espace probabilisé.

2. Propriétés

■ ***Propriétés élémentaires.*** Soient P une probabilité sur l'univers fini Ω, et A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On a :

- $P(\varnothing) = 0$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

• $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \overline{B})$ (cas particulier : si $B \subset A$, alors : $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$),

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

▪ ***Croissance.*** Soient P est une probabilité sur l'univers fini Ω, et A et B deux éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. Si $A \subset B$, alors : $P(A) \leq P(B)$.

Remarque : cette propriété est appelée "croissance" car la probabilité P est une application croissante de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$, muni de la relation d'inclusion (relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}(\Omega)$), dans $[0, 1]$ (muni de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$).

▪ ***Formule du Crible (hors programme).*** La propriété sur la probabilité d'une réunion peut être généralisée par la formule de Poincaré, ou formule du Crible (résultat hors programme). Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'événements, on a : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\left[\sum_{1\leq i_1<i_2<..<i_k\leq n} P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right]$.

III. Probabilité conditionnelle

Dans cette partie, on envisage une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et un espace probabilisé (Ω, P) lié à $\mathcal{E}$.

▪ ***Définition.*** Soient A et B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, le nombre : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (également notée $P(^B/_A)$).

▪ ***Propriété.*** Soit A est un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$. En notant P_A l'application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par : $B \mapsto P_A(B)$, P_A est une probabilité sur l'univers fini Ω.

Remarque : P_A vérifie donc toutes les propriétés du II

▪ ***Formule des probabilités composées.*** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. On a :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P_{A_1\cap\ldots\cap A_{i-1}}(A_i).$$

▪ ***Formule des probabilités totales.*** Soient I une partie de $\mathbb{N}$, $\{A_i, i\in I\}$ un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que : $\forall i\in I$, $P(A_i) \neq 0$. Pour tout événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)\,P(A_i).$$

Remarque : Si I est une partie de $\mathbb{N}$ et $\{A_i, i\in I\}$ une famille d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que : $\forall (i, j)\in I^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$, alors pour tout événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$, on a :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i).$$

▪ ***Formule de Bayes (probabilités des causes).*** Soient I une partie non vide de $\mathbb{N}$, $\{A_i, i\in I\}$ un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\forall i\in I$, $P(A_i) \neq 0$ et B un événement de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$. On a :

$$\forall i\in I,\ P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)\,P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)\,P(A_i)}{\sum_{j\in I} P_{A_j}(B)\,P(A_j)}.$$

IV. Indépendance en probabilité

Dans cette partie, on envisage une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ et un espace probabilisé (Ω, P) lié à $\mathscr{E}$.

■ ***Indépendance de deux événements.*** Deux événements A et B de $\mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants si : $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

■ ***Cas particuliers.***

- Si A est un événement de probabilité non nulle, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.
- Si $P(A) = 0$, A est indépendant de tout autre événement.

■ ***Indépendance d'une suite finie ou infinie d'événements.*** Soient I une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'événements de $\mathscr{P}(\Omega)$.

- $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements deux à deux indépendants si : $\forall (i, j)\in I^2$, $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$,
- $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants (ou indépendants) si : $\forall J \subset I,\ P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$.

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants de $\mathscr{P}(\Omega)$, alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ (où pour tout $i\in I$, B_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$) est également une famille d'événements mutuellement indépendants de $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarque : le programme officiel de maths sup se limite à une famille finie d'événements, mais le programme de maths spé envisage une famille finie ou infinie.

■ ***Propriété.*** L'indépendance mutuelle des événements d'une famille d'événements implique leur indépendance deux à deux . La réciproque est fausse dès lors qu'il y a plus de deux événements dans cette famille.

V. Programme officiel

Hors-programme en maths sup :

- Tribu d'événements, définitions d'une probabilité sur une tribu.
- Propriété de continuité croissante, de continuité décroissante.
- Probabilités définies sur un univers infini.
- Evénements négligeables, quasi impossibles, presque sûrs, propriétés presques sûres.

Hors-programme (maths sup et maths spé) :

- Formule du Crible.
- Tribu des boréliens, tribu engendrée par un système complet d'événements.

Chapitre 35. Probabilités sur un univers fini

Maths SUP-

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

I. Déterminer la probabilité d'un événement

1. A l'aide de raisonnements combinatoires

Penser que, pour écrire que la probabilité d'un événement E est égale au quotient du cardinal de l'ensemble A des éventualités favorables à la réalisation de E par le cardinal de l'ensemble Ω des éventualités réalisables (autrement dit "au nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles"), **il faut justifier au préalable que Ω est fini et que les différentes éventualités sont équiprobables**. En général, la validité de cette hypothèse est issue du modèle proposé : on tire au hasard des n boules indiscernables au toucher, on lance une pièce ou un dé équilibré n fois... mais il est parfois nécessaire de l'admettre quand l'énoncé a oublié d'en faire la précision.

Une fois l'hypothèse d'équiprobabilité justifiée, on peut déterminer les cardinaux respectifs de A et de Ω à l'aide de raisonnements combinatoires (voir fiche méthode du chapitre **15.** Dénombrements).

2. A l'aide de l'événement contraire

Penser que, pour déterminer la probabilité d'un événement A, il est parfois plus simple de considérer l'événement $\overline{A}$ (par exemple, pour déterminer la probabilité de l'événement "obtenir au moins un succès dans une suite d'épreuves", on peut déterminer celle de l'événement "ne pas obtenir de succès dans une suite d'épreuves").

3. En décomposant l'événement dont on recherche la probabilité

Pour déterminer la probabilité d'un événement E, on peut chercher à **identifier différentes étapes nécessaires à sa réalisation** (en écrivant, par exemple : "pour que l'événement E soit réalisé, il faut et il suffit que..."), c'est-à-dire à écrire E comme réunion, intersection et/ou privation d'événements plus simples.

4. A l'aide de la formule des probabilités totales

Si l'événement dont on recherche la probabilité dépend d'étapes antérieures identifiables, on peut utiliser **la formule des probabilités totales**. Pour cela, il faut préciser le **système complet d'événements** considéré, en vérifiant rigoureusement qu'il s'agit bien d'un système complet d'événements, tous de probabilités non nulles.

II. Déterminer la probabilité d'une union, d'une intersection, d'une privation

1. Déterminer la probabilité d'une union finie

Pour déterminer la probabilité d'une union finie d'événements, on peut :

– soit **prouver l'incompatibilité des événements** (i.e. que deux événements quelconques de la réunion ne peuvent être réalisés simultanément) puis calculer la somme des probabilités,

– soit utiliser **la formule du Crible Poincaré** (on pensera alors que la seconde somme comporte $\binom{n}{k}$ termes) (résultat hors programme).

2. Déterminer la probabilité d'une union dénombrable (*hors-programme en première année*)

Trois cas se présentent :

– si les évenements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors : $P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(A_i)$,

– si on peut calculer $P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$,

– si la suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante (au sens de l'inclusion), alors : $P\left(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$

3. Déterminer la probabilité d'une intersection finie

Pour déterminer la probabilité d'une intersection finie d'événements, on peut :

– soit **prouver l'indépendance mutuelle** des événements concernés puis calculer le produit des probabilités (voir IV),

– soit utiliser la **formule des probabilités composées**.

4. Déterminer la probabilité d'une intersection dénombrable (*hors-programme en première année*)

Trois cas se présentent :

– si on peut calculer $P\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P\left(\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i\right)$,

– si la suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion), on a : $P\left(\bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

5. Déterminer la probabilité d'une privation

Penser que, si $B \subset A$ (i.e. si, l'événement B étant réalisé, l'événement A l'est également) alors : $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ (méthode plus simple que le calcul de $P(A \cap \overline{B})$ et aboutissant, bien entendu, à la même valeur).

III. Déterminer une probabilité conditionnelle

Attention... *Ne jamais parler, dans le calcul d'une probabilité conditionnelle, "d'événement conditionnel". Cette appellation n'a en effet aucun sens mathématique. De plus, pour parler de la probabilité $P_B(A)$, il faut s'assurer que B a une probabilité non nulle.*

1. A l'aide de la définition

2. En considérant un nouvel espace probabilisé et en se ramenant au I et II

Il s'agit du cas le plus fréquent en utilisant une rédaction du type : "Sachant que B est réalisé, réaliser A revient à ...".

3. A l'aide de la formule de Bayes

Penser que, quand on cherche à déterminer la probabilité d'un événement causal sachant que l'on en connaît la conséquence, on peut "inverser" le problème à l'aide de la formule de Bayes.

IV. Montrer que des événements sont indépendants, mutuellement indépendants

1. Avec les hypothèses par l'énoncé. Dans certains cas (si cela n'est pas l'objet d'une question bien entendu), il est possible de l'admettre, considérant qu'il s'agit d'un oubli de l'énoncé.

2. A l'aide de la définition, en procédant à quelques calculs.

3. A l'aide d'événements contraires : penser que A et B sont indépendants si, et seulement si, les événements A et $\overline{B}$ (ou $\overline{A}$ et B ou encore $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants. Cela peut permettre, dans certains cas, de simplifier les calculs.

On fera également attention à deux choses :

– une famille d'événements deux à deux indépendants n'est pas toujours une famille d'événements mutuellement indépendants ;

– la notion d'indépendance dépend de la probabilité choisie ; ainsi une famille d'événements peut-elle être constituée d'événements mutuellement indépendants pour unr probabilité P, mais pas nécessairement pour une autre probabilité, par exemple une probabilité conditionnelle P_A.