Chapitre 3. Polynômes

Maths SUP-

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

I. Polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1. Propriétés fondamentales de $\mathbb{K}[X]$

■ ***Polynôme, fonction polynomiale.*** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que : $\exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n = 0$.

• On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients, et on note : $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$.

• On appelle fonction polynôme (ou fonction polynomiale) de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ associée à P, l'application $x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

• L'application qui à tout polynôme associe sa fonction polynomiale associée est injective.

■ ***Anneau*** $\mathbb{K}$**[X].**

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

• On munit $\mathbb{K}[X]$ des lois +, × et . définies par :

$$\forall (P, Q)\in (\mathbb{K}[X])^2 / P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n,\ Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \begin{cases} P + Q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n \\ P \times Q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) X^n \\ \lambda . P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda a_n X^n \end{cases}.$$

• $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau.

• L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est intègre, autrement dit : $\forall (P, Q)\in (\mathbb{K}[X])^2$, $(P\times Q = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0)$. Plus généralement, un produit de plusieurs polynômes est nul si, et seulement si, au moins un de ces polynômes est nul.

■ ***Unicité des coefficients.*** Deux polynômes sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux deux à deux : si $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n$, P et Q sont égaux si, et seulement si : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n = b_n$.

2. Degré d'un polynôme

■ ***Définitions.*** Soit $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$.

• Pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n est appelé le coefficient de degré n de P.

• Si $P \neq 0$, le degré de P (noté deg(P) ou d°P) est le plus grand des entiers n tels que $a_n \neq 0$ (a_n est alors appelé le coefficient dominant de P).

• Si le coefficient dominant de P est 1, on dit que P est un polynôme unitaire, ou normalisé.

• Si P = 0, on pose, par convention : $\deg(P) = -\infty$.

■ ***Propriétés.*** Soient $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On a :

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$,
- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$,
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

■ ***Notation.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Algorithme de Horner

Cet algorithme permet de déterminer les coefficients d'un polynôme grâce à une relation de récurrence.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. En posant : $P_0 = a_n$ et : $\forall k \in [1, n]$, $P_k = a_{n-k} + P_{k-1}X$, on a :

$$\begin{aligned} P &= P_n \\ &= a_0 + P_{n-1}X \\ &= a_0 + (a_1 + (\ldots(a_{n-1} + a_n X)X)\ldots)X. \end{aligned}$$

II. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

1. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

■ Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2 / B \neq 0$. On peut écrire : $\exists!(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2 / A = BQ + R$, où $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$. Les polynômes Q, R, A et B sont alors appelés le quotient, le reste, le dividende et le diviseur de la division euclidienne (division suivant les puissances décroissantes) de A par B.

■ Soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2 / B \neq 0$, et Q (resp. R) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de A par B. On dit que B divise A (ou que B est un diviseur de A, ou que A est un multiple de B), et l'on note : $B \mid A$, si : $R = 0$, c'est-à-dire si : $A = BQ$.

2. PGCD et PPCM de deux polynômes

■ ***PGCD.*** Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Il existe un unique polynôme D unitaire ou nul à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que l'ensemble des diviseurs communs à A et à B soit l'ensemble des diviseurs de D. D est alors le plus grand commun diviseur (pgcd) de A et de B, et l'on note : D = pcgd (A, B) ou $D = A \wedge B$.

■ ***PPCM.*** Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. Il existe un unique polynôme M unitaire ou nul à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que : $A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X]$. M est alors le plus petit commun multiple (ppcm) de A et de B, et l'on note : M = ppcm (A, B) ou $M = A \vee B$.

3. Algorithme d'Euclide

■ ***Théorème d'Euclide.*** Soit $(A, B, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^4$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et tels que : $A = BQ + R$. On a : $A \wedge B = B \wedge R$.

■ ***Algorithme d'Euclide.*** Soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$, β le coefficient dominant de B ($\beta \in \mathbb{K}^*$), Q le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B. On appelle algorithme d'Euclide l'algorithme suivant, qui permet de déterminer le pgcd de A et de B :

❑ Si $R = 0$, alors : $A \wedge B = \dfrac{1}{\beta} B$,

❑ Sinon, on répète les opérations suivantes :
- on stocke le polynôme R dans une variable de stockage, notée S,
- on affecte à R le reste de la division euclidienne de B par R,
- on affecte à B l'ancienne valeur de R (stockée dans S),

jusqu'à ce que la condition $(R = 0)$ soit réalisée. On a alors : $S \neq 0$, et en notant σ le coefficient dominant de S : $A \wedge B = \dfrac{1}{\sigma} S$, autrement dit le pgcd de A et de B est le polynôme unitaire associé au dernier reste non nul des divisions euclidiennes successives de A par B, de B par R, etc.

4. Polynômes premiers entre eux, théorèmes de Bézout et de Gauss

■ ***Définition.*** Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. On dit que A et B sont premiers entre eux, ou étrangers, si : $A \wedge B = 1$.

■ ***Propriété.*** Soient $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$, D un diviseur commun non nul à A et à B ($D \in \mathbb{K}[X]$), et d le coefficient dominant de D ($d \in \mathbb{R}^*$). En notant A' et B' les polynômes tels que : $A = DA'$ et : $B = DB'$, on a : $(\frac{1}{d} D = A \wedge B \Leftrightarrow A' \wedge B' = 1)$.

■ ***Théorème de Bézout.*** Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$. A et B sont premiers entre eux si, et seulement si : $\exists (U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2 \,/\, AU + BV = 1$.

■ ***Corollaires.*** Soient $(A, B, C) \in (\mathbb{K}[X])^3$ et $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a :

· $(A \wedge (BC) = 1) \Leftrightarrow (A \wedge B = 1 \text{ et } A \wedge C = 1)$,

· $(A \wedge B = 1) \Leftrightarrow (A^n \wedge B^p = 1)$.

■ ***Théorème de Gauss.*** Soient $(A, B, C) \in (\mathbb{K}[X])^3$. On a : $\begin{cases} A \wedge B = 1 \\ A \mid BC \end{cases} \Rightarrow A \mid C$.

III. Racines d'un polynôme

■ Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est racine de P si $P(\lambda) = 0$. De plus, λ est racine de P si, et seulement si, $(X - \lambda)$ divise P.

■ Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si $(X - \lambda)^k$ divise P et $(X - \lambda)^{k+1}$ ne le divise pas. De plus, λ est racine d'ordre de multiplicité k de P si, et seulement si : $\forall i \in [0, k-1]$, $P^{(i)}(\lambda) = 0$ et $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

■ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et λ_n sont n racines distinctes de P ($n \in \mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et α_n avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, alors $\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise P, et : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq \deg(P)$.

IV. Théorème de d'Alembert. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

1. Théorème de d'Alembert-Gauss. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

■ ***Théorème de d'Alembert-Gauss.*** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

■ Tout polynôme P de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité des racines).

■ Soient $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et λ_p les p racines (distinctes) de P ($p \in \mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et α_p avec $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ et α ($\alpha \in \mathbb{C}^*$) le coefficient dominant de P. On peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P : $P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

2. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

■ Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si λ est une racine complexe d'ordre de multiplicité k de P, alors $\overline{\lambda}$ est également racine d'ordre de multiplicité k de P.

■ Soient $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et λ_n les n racines réelles (distinctes) éventuelles de P ($n \in \mathbb{N}^*$) d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et α_n ; $\mu_1, \overline{\mu_1}, \mu_2, \overline{\mu_2}, \ldots, \mu_m$ et $\overline{\mu_m}$ les 2m racines complexes non réelles (distinctes) éventuelles ($m \in \mathbb{N}^*$) de P d'ordres de multiplicité respectifs $\beta_1, \beta_2, \ldots$ et β_m et α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) le coefficient dominant de P.

En notant, pour tout $i \in [1, m]$, $s_i = \mu_i + \overline{\mu_i} = 2\mathcal{Re}(\mu_i)$ et $p_i = \mu_i \cdot \overline{\mu_i} = |\mu_i|^2$, on peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P : $P = \alpha \left[\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m} (X^2 - s_i X + p_i)^{\beta_i}\right]$ (l'un des deux produits étant absent si P n'admet aucune racine réelle ou aucune racine complexe non réelle).

V. Polynômes scindés, polynômes irréductibles

1. Polynômes scindés

■ ***Défintion.*** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est scindé dans $\mathbb{K}$ si : $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$, $\exists (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n / P = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$.

■ ***Propriété.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_k)_{0 \le k \le n} \in \mathbb{K}^{n+1} / a_n \neq 0$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Si P est scindé dans $\mathbb{K}$, alors en notant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et λ_n les n racines réelles de P dans $\mathbb{K}$ (en tenant compte de leurs ordres de multiplicité), on a :

$$\forall k \in [1, n], \quad \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

2. Polynômes irréductibles

■ ***Définition.*** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P n'est pas constant et si l'ensemble de ses diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ est : $(\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}) \cup \{\lambda P, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

■ Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est divisible par au moins un polynôme irréductible.

■ ***Décomposition en produit de facteurs irréductibles.*** Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$, n son degré ($n \in \mathbb{N}^*$) et λ son coefficient dominant. Il existe une famille $(P_1, \ldots, P_m)$ ($m \in [1, n]$)de polynômes unitaires irréductibles deux à deux distincts, unique à l'ordre près, et une unique famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ d'entiers naturels non nuls tels que : $P = \lambda \prod_{i=1}^{m} P_i^{\alpha_i}$. Cette décomposition s'appelle décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

■ L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble formé des polynômes de degré 1 à coefficients réels, et de l'ensemble des polynômes de degré 2 n'ayant aucune racine réelle.

■ L'ensemble des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré 1

VII. Formule de Taylor pour les polynômes

■ Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On a : $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a)$, soit encore : $P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a)$.

■ ***Cas particulier.*** Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$, et $a \in \mathbb{R}$. On a : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$, soit : $P(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} P^{(k)}(a)$.

VIII. Programme officiel

Hors programme :

- Valuation.
- Polynômes de Lagrange, de Tchebychev, de Bernoulli, d'Euler, de Legendre...
- Divisions suivant les puissances croissantes de deux polynômes.

A la limite du programme :

- a est racine d'ordre de multiplicité au moins k de P si, et seulement si, $P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0$.
- P est nul s'il est nul sur un intervalle non réduit à un point.
- Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils coïncident sur un intervalle non réduit à un point.
- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}$.

Chapitre 3. Polynômes

Maths SUP-

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

I. Précisions et rappels

Il y a deux façons de noter un «polynôme» :

– si l'on parle de polynôme (terme d'algèbre), on écrit : $P = P(X) = 3X - 2$,

– si l'on parle de fonction polynomiale (terme d'analyse), on écrit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 3x - 2$.

Attention à ne pas confondre les deux, même si leurs propriétés sont analogues. Se souvenir que tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

II. Déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme P

1. Isoler le monôme de plus haut degré

2. Si P est défini sous forme de produit

Le degré de P s'obtient par addition des degrés des polynômes du produit. Le coefficient dominant de P s'obtient en multipliant les coefficients dominants des polynômes du produit.

☞ Voir l'exercice "Polynômes d'interpolation de Lagrange".

3. Si P est défini sous forme de somme

On peut comparer les degrés des polynômes de la somme :

– si un polynôme possède un degré strictement supérieur à celui des autres, P a le même degré et le même coefficient dominant que ce polynôme,

– si plusieurs polynômes ont un degré «maximal», il faut comparer leurs monômes de plus haut degré afin de s'assurer que ceux-ci ne s'annulent pas. Si ceux-ci ne s'annulent pas, le monôme de plus haut degré de P est égal à la somme des monômes de plus haut degré de ces polynômes ; si ceux-ci s'annulent, il faut alors rechercher les termes de degré immédiatement inférieur, puis procéder de la même façon jusqu'à ce ce que les termes ne s'annulent pas.

☞ Voir les exercices "Composition de polynômes", "Résolution d'une équation polynomiale".

4. S'il s'agit d'une suite de polynômes formée à l'aide d'une relation de récurrence

On peut conjecturer le résultat à l'aide des premiers polynômes de la suite, puis procéder par récurrence.

☞ Voir les exercices "Suite de polynômes définis à l'aide d'une intégrale", "Polynômes de Tchebychev".

5. Si $P = Q^{(n)}$, où Q est un polynôme

On peut s'intéresser au monôme de plus haut degré de Q puis le dériver n fois.

☞ Voir le problème "Polynômes de Legendre".

III. Déterminer la parité d'un polynôme P

1. Pour montrer qu'un polynôme est pair (ou impair)

Pour montrer qu'un polynôme P est pair (resp. impair), on peut :

– montrer que tous ses monômes sont des monômes de puissance paire (resp. impaire),

– monter que la fonction polynomiale associée à P est paire (resp. impaire).

– monter que sa fonction polynomiale associée est la partie régulière du développement limité d'une fonction paire au voisinage d'un point (voir le chapitre "**Formules de Taylor et Développements limités**".)

2. Si la parité d'un polynôme P_n dépend de la parité de l'entier n

Il peut arriver que l'on ait à établir que pour tout entier naturel n, un polynôme P_n soit, par exemple, pair si n est pair, et impair si n est impair. Pour le prouver, on peut :

– soit distinguer, pour tout entier naturel n, les cas n pair / n impair et se ramener au point III.1 précédent,

– soit montrer que pour tout entier naturel n : $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Cette méthode est généralement meilleure notamment quand la suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, car elle évite de distinguer les cas au sein de l'hérédité dans la démonstration par récurrence.

☞ Voir l'exercice "Polynômes de Hermite".

IV. Déterminer les racines d'un polynôme P

1. Si P est de degré 2

Soit à résoudre l'équation ① : $ax^2 + bx + c = 0$ ($(a, b, c)\in\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$). On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ l'une des racines carrées de Δ. Les racines de l'équation sont alors : $x_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.

Cas particulier où $(a, b, c)\in\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation ① admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$,
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation ① admet une racine réelle double : $-\dfrac{b}{2a}$,
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation ① admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Propriété : La somme des racines du trinôme $aX^2 + bX + c$ vaut $-\dfrac{b}{a}$ et le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}$.

2. Si P est de degré strictement supérieur à 2

Pour rechercher les racines d'un polynôme de degré strictement supérieur à 2, on peut :

– rechercher des racines évidentes du polynôme (puis le cas échéant, pour chacune des racines trouvées, déterminer son ordre de multiplicité par dérivations successives), et se ramener au point IV.1 précédent après factorisation,

– utiliser les relations entre les racines (non forcément distinctes) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ du polynôme : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $a_n \neq 0$, alors :

i) la somme des racines de P vaut : $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$,

ii) le produit des racines de P vaut : $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$,

iii) plus généralement, on peut utiliser la relation : $\forall k \in [1, n]$, $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$.

☞ Voir les exercices "Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$", "Calcul de sommes et de produits trigonométriques".

V. Propriétés des racines d'un polynôme

1. Nombre de racines d'un polynôme

Penser que tout polynôme de degré n possède exactement n racines dans $\mathbb{C}$ (en tenant compte des ordres de multiplicité).

☞ Voir la fiche de cours.

2. Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels

Se souvenir que si un nombre complexe z est une racine complexe de P d'ordre de multiplicité k, alors $\overline{z}$ est également racine de P d'ordre de multiplicité k (ainsi, le nombre de racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels est toujours pair).

☞ Voir l'exercice "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$" (question 6).

3. Montrer qu'un nombre complexe a est racine d'un polynôme P

Pour montrer qu'un nombre (réel ou) complexe a est racine d'un polynôme P, on peut :

– calculer P(a) et vérifier que P(a) = 0,

– montrer que X - a divise P (i.e. que le reste de la division euclidienne de P par X - a est nul),

– montrer que P est divisible par un polynôme admettant a pour racine.

4. Montrer qu'un nombre complexe a est racine d'ordre k ($k \geq 1$) d'un polynôme P

Pour montrer qu'un nombre (réel ou) complexe a est racine d'un polynôme P d'ordre de multiplicité k, on peut :

– montrer que $(X - a)^k$ divise P et que $(X - a)^{k+1}$ ne divise pas P,

– calculer les dérivées successives de P et montrer que pour tout $i \in [0, k - 1]$, a est racine de $P^{(i)}$, et que a n'est pas racine de $P^{(k)}$.

5. Montrer qu'un nombre complexe a est racine d'ordre au moins k ($k \geq 1$) d'un polynôme P

Pour montrer qu'un nombre (réel ou) complexe est racine d'un polynôme P d'ordre de multiplicité k, on peut :

– montrer que $(X - a)^k$ divise P,

– calculer les dérivées successives de P et montrer que pour tout $i \in [0, k - 1]$, a est racine de $P^{(i)}$,

– montrer que P est divisible par un polynôme admettant a pour racine d'ordre de multiplicité au moins k.

☞ Voir les exercices "Ordre de multiplicité" et "Divisibilité de polynômes".

6. Montrer qu'un polynôme admet au moins une racine complexe

Se souvenir que tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe (théorème de D'Alembert), i.e. que tout polynôme non constant est divisible au moins par un polynôme irréductible.

☞ Voir la fiche de cours.

7. Montrer qu'un polynôme admet au moins une racine réelle

Pour montrer qu'un polynôme admet au moins une racine réelle, on peut :

– si le polynôme est de degré impair, utiliser le fait que les racines complexes non réelles d'un polynôme sont toujours en nombre pair en tenant compte des ordres de multiplicité (étant deux à deux conjuguées, avec le même ordre de multiplicité), et la propriété est donc toujours vraie,

– dans le cas général, s'il s'agit d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il n'est pas de signe constant sur $\mathbb{R}$ (en s'intéressant à certaines valeurs prises par le polynôme et/ou à ses limites en $-\infty$ ou $+\infty$) et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

☞ Voir l'exercice "Localisation des racines d'un polynôme".

8. Montrer qu'un nombre réel a est racine d'ordre de multiplicité pair (ou impair) d'un polynôme P

Pour montrer que le nombre réel a est racine d'ordre de multiplicité pair (resp. impair) d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on peut montrer que P s'annule sans changer de signe (resp. en changeant de signe) en a.

☞ Voir l'exercice "Racine et changement de signe".

9. Montrer que toutes les racines d'un polynôme P sont simples (i.e. d'ordre de multiplicité 1)

Pour montrer que toutes les racines d'un polynôme P sont simples, on peut :

– déterminer le degré n de P,

– montrer que P admet au moins une racine d'ordre de multiplicité impair (cf. point V.8 ci-dessus),

– raisonner par l'absurde : en supposant que P admet un nombre de racines d'ordre de multiplicité impair inférieur ou égal à $n - 1$, aboutir à une contradiction,

– en conclure que P admet au moins n racines d'ordre de multiplicité impair, et comme P est de degré n, que P admet exactement n racines que toutes ces racines sont simples.

On peut également raisonner directement par l'absurde : en supposant que P admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 2, aboutir à une contradiction.

☞ Voir l'exercice "Etude d'une famille de fonctions polynomiales".

VI. Montrer qu'un polynôme est nul, que deux polynômes sont égaux

1. Montrer qu'un polynôme P est nul

Pour montrer qu'un polynôme P est nul, on peut :

– montrer que tous ses coefficients sont nuls,

– montrer que P s'annule plus de fois que son éventuel degré,

– en particulier, montrer que P s'annule sur un intervalle non réduit à un point.

☞ Voir l'exercice "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$".

2. Montrer que deux polynômes sont égaux

Pour montrer une égalité polynomiale P = Q, on peut :

– montrer que les coefficients de P et de Q sont égaux deux à deux,

– montrer que le polynôme P - Q est nul,

– montrer que P et Q ont les mêmes racines avec les mêmes ordres de multiplicité et le même coefficient dominant,

– si P et Q sont les parties régulières de deux développements limités à un même ordre de deux fonctions f et g en un point, montrer que les fonctions f et g ont même développement limité, puis utiliser l'unicité de la partie régulière du développement limité.

☞ Voir les exercices "Propriétés des polynômes dans $\mathbb{C}_n[X]$", "Polynômes de Tchebychev".

VII. Décomposer un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

1. Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Pour obtenir la décomposition d'un polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$, on peut déterminer ses p racines complexes distinctes $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ ($p\in\mathbb{N}^*$) et leurs ordres de multiplicité respectifs $(\alpha_i)_{1\leq i\leq p}$. En notant α ($\alpha\in\mathbb{C}^*$) le coefficient dominant de P, on peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ de P : $P = \alpha \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

☞ Voir les exercices "Polynômes de Tchebychev", "Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$", "Calcul de quelques sommet et produits trigonométriques"..

2. Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

Pour obtenir la décomposition d'un polynôme non constant de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, on peut déterminer ses racines réelles éventuelles $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) et leurs ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, ses couples de racines complexes conjuguées non réelles éventuelles $(\mu_1, \overline{\mu_1})$, $(\mu_2, \overline{\mu_2})$, ..., $(\mu_m, \overline{\mu_m})$ ($m\in\mathbb{N}^*$) et leurs ordres de multiplicité respectifs $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$. En notant α ($\alpha\in\mathbb{R}^*$) le coefficient dominant de P et, pour tout entier $i\in[\![1, m]\!]$, $s_i = \mu_i + \overline{\mu_i} = 2\mathcal{Re}(\mu_i)$ et $p_i = \mu_i \cdot \overline{\mu_i} = |\mu_i|^2$, on peut alors écrire la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de P :

$P = \alpha \left[\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{m} (X^2 - s_i X + p_i)^{\beta_i}\right]$ (l'un des deux produits étant absent si P n'admet aucune racine réelle ou aucune racine complexe non réelle).

En pratique, on décompose le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ (cf. point VII.1 ci-dessus). Si le polynôme possède des racines réelles, on scinde le produit en deux (l'un faisant intervenir les racines réelles, l'autre les racines complexes non réelles) et l'on transforme le second en regroupant le terme où apparaît une racine complexe et celui où apparaît son conjugué, éventuellement à l'aide d'un changement de variable afin de rassembler chacune des racines complexes et son conjugué.

☞ Voir l'exercice "Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$".

VIII. Montrer qu'un polynôme est scindé

0. Ne pas confondre l'expression "polynôme scindé" et "polynômes à racines simples"

Par exemple, le polynôme $3(X+5)(X-4)^2$ est scindé dans $\mathbb{R}$ car toutes ses racines sont réelles, mais admet 4 pour racine double.

Ainsi, un polynôme à racines simples et réelles est toujours scindé dans $\mathbb{R}$, mais la réciproque est fausse.

1. Montrer qu'un polynôme scindé dans $\mathbb{C}$

Se souvenir que tout polynôme est scindé dans $\mathbb{C}$ (conséquence du théorème de D'Alembert).

☞ Voir la fiche de cours.

2. Montrer qu'un polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$

Pour montrer qu'un polynôme est scindé dans $\mathbb{R}$, on peut :

– le décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ (cf. supra), puis montrer que toutes les racines obtenues sont rélles,

– raisonner par l'absurde : en supposant qu'il admette une racine complexe non réelle, aboutir à une contradiction,

– s'il s'agit du polynôme caractéristique d'une matrice, montrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (hors-programme en première année).

☞ Voir l'exercice "Polynômes de Tchebychev".

IX. Polynômes irréductibles

1. Montrer qu'un polynôme est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$

Pour montrer qu'un polynôme P non constant est irrédutible dans $\mathbb{K}[X]$, on peut :

– considérer un diviseur de P et montrer que ce diviseur est soit constant, soit un multiple de P,

– si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se souvenir que P est irréductible si, et seulement si, P est de degré 1,

– si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que P est de irréductible si, et seulement si, soit P est de degré 1, soit P est de degré 2 et n'admet pas de racines réelles.

2. Décomposer P en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$

Pour décomposer un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, on peut :

– si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, déterminer la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$,

– si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, déterminer la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$.

☞ Voir l'exercice "Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$".

X. Arithmétique polynomiale

1. Déterminer le quotient et/ou le reste de la division euclidienne de deux polynômes A et B

Se souvenir qu'il y a unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne de A par B, et que :

– $\deg R < \deg B$ ou $R = 0$,
– si $Q \neq 0$, $\deg Q = \deg A - \deg B$.

Pour déterminer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B, on peut :

– pour déterminer Q, poser la division,
– pour déterminer R, on peut se ramener à l'égalité $A = BQ + R$, puis successivement :

i) écrire R sous forme $\sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$, où d = deg B,

ii) déterminer les racines de B ainsi que leurs ordres de multiplicité,

iii) si a ($a \in \mathbb{C}$) est racine de B d'ordre de multiplicité k ($k \geq 1$) évaluer la relation en a (ce qui donne l'équation $A(a) = R(a)$, puis dériver successivement la relation et pour tout $i \in [0, k-1]$, évaluer la relation obtenue en a après i dérivations (ce qui donne $A^{(i)}(a) = R^{(i)}(a)$), et ainsi de suite pour chaque racine de a

iv) on obtient alors un système de d équations à d inconnues, qu'il faut résoudre (si le système est complexe, cf. chapitre : "Systèmes linéaires et calcul matriciel").

A noter : il est inutile de calculer les dérivées i-èmes ($i \in [0, k-1]$) de BQ. En notant S = BQ, si a est racine d'ordre de multiplicité k de B, a est racine d'ordre de multiplicité au moins k de S, et donc les dérivées successives de S s'annulent de toute façon en a jusqu'à la k - 1 ème au moins.

A noter également : il peut parfois s'avérer plus utile d'exprimer R dans une autre base de de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ que la base canonique, en utilisant par exemple une base de la forme $((X-a)^k)_{1 \leq k \leq d-1}$. C'est notamment le cas lorsque a est racine multiple de B.

☞ Voir l'exercice "Reste de la division euclidienne de polynômes".

2. Montrer qu'un polynôme B divise un polynôme A (i.e. que A est multiple de B)

Pour montrer qu'un polynôme B divise un polynôme A, i.e. que A est multiple de B (où deg A ≥ deg B), on peut :

– se ramener à la définition en montrant qu'il existe un polynôme Q tel que A = BQ,

– montrer que le reste de la division euclidienne de A par B est nul (cf. point X.1 ci-dessus),

– montrer que toutes les racines (y compris complexes le cas échéant) de B sont racines de A, avec au moins le même ordre de multiplicité,

– décomposer A et B en produits de facteurs premiers et montrer que tous les facteurs premiers intervenant dans la décomposition de B (y compris le cas échéant les facteurs premiers complexes) interviennent aussi dans la décomposition de A, avec une puissance au moins aussi élevée,

– utiliser le théorème de Gauss : si B est premier avec C et si B divise AC, alors B divise A.

☞ Voir l'exercice "Divisibilité de polynômes".

3. Déterminer le pgcd de deux polynômes (MPSI)

Se souvenir que par définition, le pgcd est toujours un polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1). Pour déterminer le pgcd de deux polynômes A et B (où deg A ≥ deg B), on peut :

– utiliser l'algorithme d'Euclide : effectuer la division euclidienne de A par B, puis de B par le reste R_1 de cette première division, puis de R_1 par le reste R_2 de cette seconde division, etc... jusqu'à ce que le reste soit nul : le pgcd de P et Q est alors le dernier reste non nul de ces divisions successives, divisé par son coefficient dominant,

– utiliser la relation de Bézout : montrer qu'il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X])^2$ / AU + BV = D (où $D \in (\mathbb{K}[X])$, et conclure alors que D = pgcd (A, B),

– décomposer A et B en produits de facteurs premiers : le pgcd des polynômes A et B est alors le produit des facteurs premiers communs à A et à B, pris respectivement avec la puissance la plus élevée.

4. Montrer que deux polynômes sont premiers entre eux (MPSI)

Pour montrer que deux polynômes A et B sont premiers entre eux, on peut :

– montrer que leur pgcd est égal à 1 (cf. point X.3 ci-dessus), notamment à l'aide du théorème de Bézout,

– raisonner par l'absurde : supposer qu'ils admettent un diviseur commun non constant, et aboutir à une contradiction,

– montrer que A^p et B^p sont premiers entre eux (avec $p \in \mathbb{N}^*$),

– montrer que B se décompose sous forme de produit de polynômes tous premiers avec A.

☞ Voir l'exercice "Arithmétique polynomiale".

5. Déterminer le ppcm de deux polynômes (MPSI)

Pour déterminer le ppcm de deux polynômes P et Q, on peut se ramener à la définition, sans oublier que le ppcm de deux polynômes est par définition un polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1).

XI. Formule de Taylor pour les polynômes (MSPI)

Se souvenir que la formule de Taylor pour les polynômes peut permettre de donner une écriture d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans une autre base que la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ (i.e. dans une base de la forme $((X - a)^k)_{1 \leq k \leq n}$), ce qui peut s'avérer utile pour simplifier les calculs lorsque le réel a joue un rôle particulier par rapport aux autres polynômes en présence.

☞ Voir le chapitre "**Formules de Taylor et développements limité**". Pour une démonstration algébrique de la formule de Taylor pour les polynômes, voir le chapitre "**Espaces vectoriels**".