24. La fonction ζ de Riemann

Maths SPE

OPTIMAL *SUP-SPE*

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne alors par f_n la fonction définie sur I par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

On considère alors la fonction ζ définie par :

$$\forall x \in I, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Dans tout le problème, on pourra utiliser sans les démontrer les résultats classiques : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ *et* $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Partie I. Propriétés générales de la fonction ζ

1) Après avoir vérifié que la fonction ζ est bien définie sur I, déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

2) **a)** Que peut-on dire de la série de fonctions $\sum f_n$?

b) En déduire la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I et déterminer ses dérivées successives.

4) Dresser la courbe représentative de ζ.

Partie II. Etude générale de convexité

1) Justifier que ζ est convexe sur I.

2) On s'intéresse à la fonction f définie sur I par :

$$\forall x \in I, f(x) = \ln(\zeta(x)).$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in I, f''(x) = \frac{1}{\zeta^2(x)}\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)^2 n^{-x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x}\right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-\ln n) n^{-x}\right)^2\right].$$

b) En déduire que f est convexe sur I.

3) Etablir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1)\zeta(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, dt.$$

4) On s'intéresse désormais à la fonction g définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ g(x) = \Gamma(x)\zeta(x).$$

Prouver, à l'aide d'une extension du théorème de dérivation sous le signe intégral, que g est convexe sur I.

Partie III. Valeurs remarquables de certaines intégrales à l'aide des fonctions Γ et ζ

L'objectif de cette partie est de déterminer la valeur de certaines intégrales à l'aide des fonctions Γ et ζ.

1) **a)** Etablir avec précision que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2}-1}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$.

b) Déteminer également une expression simple de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du$.

2) **a)** A l'aide du théorème de comparaison série-intégrale, montrer que : $(\zeta(x)-1) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^x}$.

b) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t-1)}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x)}{2^x}.$$

3) On appelle T la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$.

b) Prouver que :

$$\forall x \in I,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t+1)}\,dt = -\Gamma(x)T(x).$$

4) **a)** Montrer que :

$$\forall x \in I,\ \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\operatorname{sh} t}\,dt = \left(2 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)\Gamma(x).$$

b) En déduire la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\operatorname{sh} t}\,dt$.