

24. La fonction ζ de Riemann

CORRECTION

Maths SPE

OPTIMAL SUP-SPE

Notation : dans toute la correction, on convient de noter, pour toute partie A de I , $\|\cdot\|_\infty^A$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$, i.e. la norme définie sur $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ par : $\forall f \in \mathcal{B}(A, \mathbb{K}), \|f\|_\infty^A = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Partie I. Propriétés générales de la fonction ζ

1) ■ Soit $x \in I$. Comme $x > 1$, la série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann), donc :

ζ est bien définie sur I

■ Soit $A \in \mathbb{R}^*$. Comme : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$, alors d'après la définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > A.$$

De plus, en effectuant une limite terme à terme dans une somme finie, on peut écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \text{et donc, comme } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} > A :$$

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^*, \forall x \in]1, 1 + \eta[, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} > A \quad \text{d'où, comme : } \forall n > N, \forall x \in]1, 1 + \eta[, \frac{1}{n^x} \geq 0 :$$

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^*, \forall x \in]1, 1 + \eta[, \zeta(x) > A.$$

Ce résultat étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}^*$, on peut conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$$

2) a) □ D'après la question I.1, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I , et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à valeurs positives, la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I .

□ Recherchons une éventuelle convergence normale sur I . En notant, pour toute partie A de I et pour toute fonction f bornée sur I , $\|f\|_\infty^A = \sup_{x \in A} |f(x)|$, on peut écrire, les fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}$) étant décroissantes sur I :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^I = \frac{1}{n}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann), la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur I.

□ Etudions désormais une éventuelle convergence normale sur tout compact inclus dans I. Soit alors $a \in I$. On peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = \frac{1}{n^a}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^a}$ converge (série de Riemann, $a > 1$), la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc absolument, simplement, sur $[a, +\infty[$.

On peut désormais conclure :

La série de fonctions $\sum f_n$ converge :

- absolument, donc simplement sur I
- normalement, donc absolument, simplement, sur tout compact inclus dans I

b) Comme : $\forall n \geq 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1$, et comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[2, +\infty[$ (par exemple), alors d'après le théorème de la limite terme à terme, on peut conclure :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire :

□ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^k sur I, et :

$$\forall i \in [1, k], \forall x \in I, f_n^{(i)}(x) = \frac{(-\ln n)^i}{n^x}. \quad \textcircled{1}$$

□ La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. $\textcircled{2}$

□ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $i \in [1, k]$ et pour tout $a \in I$, $\|f_n^{(i)}\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = \frac{(\ln n)^i}{n^a}$. Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \|f_n^{(i)}\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = 0$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann, $2 > 1$), les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs permettent de conclure que la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge normalement sur tout compact inclus dans I. $\textcircled{3}$

□ D'après $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$ et l'extension du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions normalement convergente, on en déduit ainsi que ζ est de classe C^k sur I, avec :

$$\forall x \in I, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

On peut désormais conclure, ce résultat étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et le cas $k = 0$ rejoignant le cas général :

$$\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I, \text{ et : } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

4) D'après la question précédente :

$$\forall x \in I, \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)}{n^x} \quad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in I, \zeta'(x) < 0.$$

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur I . De même :

$$\forall x \in I, \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \quad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in I, \zeta''(x) > 0.$$

Ainsi, ζ est convexe sur I . Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$, et comme : $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$, on peut désormais tracer l'allure de la courbe représentative de ζ .

Courbe représentative de ζ : cf. feuille annexe ci-jointe

Partie II. Etude générale de convexité

1) D'après l'étude effectuée à la question I.4 :

ζ est convexe sur I

2) a) f est de classe C^2 sur I en tant que composée de la fonction ζ , de classe C^2 sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et de la fonction \ln de classe C^2 sur \mathbb{R}^+ , et l'on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} \quad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in I, f''(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{\zeta^2(x)} \quad \text{et donc, d'après le résultat de la question I.3 :}$$

$$\forall x \in I, f''(x) = \frac{1}{\zeta^2(x)} \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 n^{-x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n) n^{-x} \right)^2 \right]$$

b) Soit E l'ensemble des suites indexées sur \mathbb{N}^* et de carré sommables (i.e. l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge). D'après le cours, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soit alors φ l'application définie sur E^2 par $(u, v) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$. D'après le cours, φ est un produit scalaire sur E. On peut alors écrire, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (u, v) \in E^2, \varphi(u, v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \quad \text{soit :}$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \right) \quad \text{①}$$

Soient alors $x \in I$ et $u(x)$ et $v(x)$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n(x) = (-\ln n)n^{-x/2} \\ v_n(x) = n^{-x/2} \end{cases}$. Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n(x)^2 = 0$ et comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann, $2 > 1$), d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (u_n(x))^2$ converge. De même, la série $\sum (v_n(x))^2$ converge. Ainsi, $u(x)$ et $v(x)$ appartiennent à E. En appliquant la relation ① aux suites $u(x)$ et $v(x)$, on peut conclure :

$$\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)^2 n^{-x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-\ln n) n^{-x} \right)^2 \right] \geq 0.$$

Ce résultat étant valable pour tout $x \in I$, comme $\frac{1}{\zeta^2(x)} > 0$, on peut désormais écrire, d'après le résultat de la question II.2.a :

$$\forall x \in I, f''(x) \geq 0 \quad \text{et donc :}$$

f est convexe sur I

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $f : t \mapsto \frac{t^x}{e^t - 1}$ est continue (donc continue par morceaux) sur \mathbb{R}^* . De plus : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$. Comme : $x - 1 > -1$, alors la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, f est intégrable sur $]0, 1[$. De plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur \mathbb{R}^* . On a alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \quad \text{et comme : } \forall t \in \mathbb{R}^*, |e^{-t}| < 1, \text{ en reconnaissant la somme d'une série géométrique :}$$

$$= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n dt \quad \text{soit en développant :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} t^x (e^{-t})^{n+1} dt.$$

Notons désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $t \mapsto t^x (e^{-t})^{n+1}$.

□ Soit $n \in \mathbb{N}$. g_n est continue (donc continue par morceaux) sur \mathbb{R}^* . De plus : $g_n(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$. Comme : $x > -1$, alors la fonction $t \mapsto t^x$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, g_n est intégrable sur $]0, 1]$. De plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g_n(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est intégrable sur \mathbb{R}^* . ①

□ La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^* vers la fonction f . ②

Enfin, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^x e^{-(n+1)t} dt \quad \text{soit en effectuant le changement de variable affine } u = (n+1)t, \\ du = (n+1)dt \text{ (C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^* \text{ dans lui-même) :}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \int_0^{+\infty} u^x e^{-u} du \quad \text{soit encore, en reconnaissant la fonction } \Gamma :$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

□ Comme $(x+1) \in I$, en reconnaissant la fonction ζ , la série $\sum \frac{1}{(n+1)^{x+1}}$ converge, et donc, la série

$$\sum \int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt \text{ converge. } \textcircled{3}$$

□ D'après ①, ② et ③ et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque (parfois appelé "théorème de convergence dominée pour les séries"), on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt \quad \text{soit d'après ce qui précède :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{x+1}} \Gamma(x+1) \quad \text{et on peut conclure, en effectuant le changement d'indice } n' = n+1 :$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \Gamma(x+1)\zeta(x+1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1} dt}$$

4) D'après la question II.3., comme : $\forall x \in I, (x-1) \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire :

$$\forall x \in I, g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$$

Soit alors F la fonction définie sur $I \times \mathbb{R}^*$ par : $(x, t) \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}$.

□ Pour tout $x \in I$, $F(x, \cdot)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur \mathbb{R}^* .

□ Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $F(\cdot, t)$ est de classe C^2 sur I , et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in I, \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = (\ln t) \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \quad \text{et :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \forall x \in I, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) = (\ln t)^2 \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}.$$

Les fonctions $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ sont continues (donc continues par morceaux) par rapport à la deuxième variable et continues par rapport à la première variable. Soit alors $(a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$, $a < b$. Comme la fonction $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante si $t \geq 1$ et décroissante si $t < 1$, et comme pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{(\ln t)^2}{e^t - 1} \geq 0$, on peut écrire :

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in I, \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t),$$

où $\varphi_{a,b}$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$\varphi_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} (\ln t)^2 \frac{t^{a-1}}{e^t - 1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 \frac{t^{b-1}}{e^t - 1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

De même que pour F , la fonction $\varphi_{a,b}$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur \mathbb{R}^* . Ainsi, la fonction $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $I \times \mathbb{R}^*$.

□ On peut désormais conclure, d'après une extension du théorème de dérivation sous le signe intégral, que g est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* , et que :

$$\forall x \in I, g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2 t^{x-1}}{e^t - 1} dt \quad \text{d'où:}$$

$$\forall x \in I, g''(x) \geq 0 \quad \text{et on peut désormais conclure :}$$

g est convexe sur I

Partie III. Valeurs remarquables de certaines intégrales à l'aide des fonctions Γ et ζ

1) D'après la question II.3, on peut écrire, comme $\frac{3}{2} > 1$:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt \quad \text{soit en effectuant le changement de variable } t = u^2, dt = 2u du \text{ (la fonction } t \mapsto t^2 \text{ étant un } C^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^* \text{ dans lui-même) :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{e^{u^2} - 1} du.$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, on peut désormais conclure :

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2}-1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

b) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $u \mapsto \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2$. u est continue (donc continue par morceaux) sur \mathbb{R}^* , et on a : $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. Ainsi : $f(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} 1$, donc f est intégrable sur $]0, 1[$. De plus : $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 f(u) = 0$; or la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur \mathbb{R}^* . Soit alors $(\varepsilon, X) \in \mathbb{R}^{*2}$, $\varepsilon < X$. Les fonctions $u \mapsto \ln(1+u)^2$ et $u \mapsto -\frac{1}{u}$ étant de classe C^1 sur $[\varepsilon, X]$, en effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^X \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du &= \left[-\frac{(\ln(1+u))^2}{u} \right]_{\varepsilon}^X + \int_{\varepsilon}^X \frac{2 \ln(1+u)}{u(1+u)} du && \text{soit :} \\ &= \frac{(\ln(1+\varepsilon))^2}{\varepsilon} - \frac{(\ln(1+X))^2}{X} + \int_{\varepsilon}^X \frac{2 \ln(1+u)}{u(1+u)} du. \end{aligned}$$

Comme : $\frac{(\ln(1+\varepsilon))^2}{\varepsilon} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \varepsilon$, et comme : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(1+X))^2}{X} = 0$, on en déduit, en faisant tendre successivement ε vers 0 puis X vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u)}{u(1+u)} du \quad \text{soit avec le changement de variable } v = \ln(1+u), dv = \frac{1}{1+u} du$$

(la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ étant un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^* dans lui-même) :

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{v}{e^v-1} dv \quad \text{d'où, d'après le résultat de la question II.3. :}$$

$$= 2\Gamma(2)\zeta(2) \quad \text{et donc, comme : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$$

$$= 2\zeta(2).$$

En reconnaissant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (résultat classique rappelé et admis par l'énoncé), on peut désormais conclure :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right)^2 du = \frac{\pi^2}{3}$$

2) a) On peut écrire :

$$\forall x \in I, \zeta(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 1 \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall x \in I, \zeta(x) - 1 = \frac{1}{2^x} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in I, 2^x(\zeta(x) - 1) = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x.$$

Soient alors $x \in I$ et f_x la fonction définie sur I par : $t \mapsto \left(\frac{2}{t}\right)^x$. La fonction f_x est décroissante, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [n, n+1], f_x(n+1) \leq f_x(t) \leq f_x(n) \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} f_x(t) dt \leq f_x(n).$$

Comme f_x est continue, positive, décroissante et de limite nulle en l'infini, et comme la série $\sum f_x(n)$ converge, la fonction f_x est intégrable sur $[1, +\infty[$, et en sommant la relation précédente pour $n = 2$ à N ($N \geq 2$) puis en faisant tendre N vers $+\infty$, il vient :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^x \leq \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{t}\right)^x dt \quad \text{soit, en effectuant le changement d'indice } n' = n+1 :$$

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt.$$

Or, on peut écrire, pour tout $X > 2$:

$$\int_2^X \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_2^X \quad \text{i.e. :}$$

$$= \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} - \frac{1}{(x-1)X^{x-1}} \quad \text{et donc, en faisant tendre } X \text{ vers } +\infty :$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in I, 0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \leq \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}.$$

Comme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} = 0$, alors, d'après le théorème de l'encadrement, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^x \right) = 0 \quad \text{et donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x (\zeta(x) - 1) = 1.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{(\zeta(x) - 1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}}$$

b) D'après la question **II.3.**, on a :

$$\forall x \in I, \Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \quad \text{et donc :}$$

$$\forall x \in I, \Gamma(x)(\zeta(x) - 1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt - \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{soit, par linéarité de l'intégration :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}(1 - e^{-t}(e^t - 1))}{e^t - 1} dt \quad \text{soit encore :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)} dt.$$

Le résultat de la question **III.2.a.** nous permet de conclure :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x)}{2^x}}$$

3) Soient $x \in I$ et f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t(e^t - 1)}$. f est continue (donc continue par morceaux) sur \mathbb{R}_+^* . De plus : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-2}$. Comme : $x - 2 > -1$ (car $x \in I$), alors la fonction $t \mapsto t^{x-2}$ est intégrable sur $]0, 1[$ (intégrale de Riemann), et donc, d'après le théorème d'équivalence pour les fonctions à valeurs positives, f est intégrable sur $]0, 1[$. De plus : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f(t) = 0$; or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (intégrale de Riemann, $2 > 1$), donc de même, f est intégrable sur $[1, +\infty[$. Ainsi, f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . On a alors :

$$\forall x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t + 1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt \quad \text{et comme : } \forall t \in \mathbb{R}_+^*, | -e^{-t} | < 1, \text{ en reconnaissant la somme d'une série}$$

géométrique :

$$= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-e^{-t})^n dt \quad \text{soit en développant :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^x (e^{-t})^{n+1} dt.$$

Notons désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $t \mapsto (-1)^n t^x (e^{-t})^{n+1}$.

□ En reprenant les notations adoptées à la question **II.3.**, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = (-1)^n g_n$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est intégrable sur \mathbb{R}_+^* . ①

□ La série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers la fonction f . ②

Enfin, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

D'après les calculs effectués à la question **II.3.**, on en déduit que la série $\sum \int_0^{+\infty} |h_n(t)| dt$ converge. ③

□ D'après ①, ② et ③ et le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions sur un intervalle quelconque (parfois appelé "théorème de convergence dominée pour les séries"), on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(t) dt \quad \text{soit d'après ce qui précède :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t + 1)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n t^{x-1} (e^t)^{n+1} dt \quad \text{soit, toujours avec le changement de variable } u = (n+1)t,$$

$$du = (n+1)dt :$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad \text{soit encore, en reconnaissant la fonction } \Gamma :$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^x} \Gamma(x) \quad \text{et on peut conclure, en effectuant le changement d'indice}$$

$$n' = n + 1 :$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{I}, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t + 1)} dt = -\Gamma(x)\zeta(x)}$$

👁 Pour information, cette égalité reste vraie pour $x \in]0, 1[$ (ce qui peut se démontrer à l'aide du critère spécial des séries alternées, car le théorème d'intégration terme à terme ne s'applique plus dans ce cas).

4) a) D'après les questions **II.3** et **III.3b**, on peut écrire, d'après la linéarité de l'intégration :

$$\forall x \in \mathbb{I}, \Gamma(x)\zeta(x) - \Gamma(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(e^t + 1)} + \frac{t^{x-1}}{(e^t - 1)} dt \quad \text{soit :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2e^{t^{x-1}}}{(e^t + 1)(e^t - 1)} dt \quad \text{i.e. :}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2t^{x-1}}{(e^t + 1)(1 - e^{-t})} dt \quad \text{d'où, en reconnaissant } e^t - e^{-t} \text{ (} t \in \mathbb{R}_+^* \text{):}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\text{sh } t} dt.$$

Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \zeta(x) + T(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^x} \quad \text{et comme pour tout entier } n \text{ impair, } 1 + (-1)^n = 0 : \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} \quad \text{soit en reconnaissant de nouveau } \zeta(x) : \\ &= \frac{1}{2^{x-1}} \zeta(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in I, -T(x) = \zeta(x) \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}} \right) \quad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in I, \zeta(x) - T(x) = \zeta(x) \left(2 - \frac{1}{2^{x-1}} \right) \quad \text{et donc d'après ce qui précède :}$$

$$\forall x \in I, \Gamma(x)\zeta(x) - \Gamma(x)T(x) = \zeta(x)\Gamma(x) \left(2 - \frac{1}{2^{x-1}} \right).$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall x \in I, \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\text{sh } t} dt = \zeta(x)\Gamma(x) \left(2 - \frac{1}{2^{x-1}} \right)}$$

b) ■ En remplaçant x par 2 dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh } t} dt &= \Gamma(2)\zeta(2) \left(2 - \frac{1}{2^1} \right) \quad \text{soit :} \\ &= \frac{3}{2} \zeta(2) \quad \text{et donc, d'après le résultat admis par l'énoncé :} \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh } t} dt = \frac{\pi^2}{4}}$$

■ De même, avec $x = 4$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\text{sh } t} dt &= \Gamma(4)\zeta(4) \left(2 - \frac{1}{2^3} \right) \quad \text{soit :} \\ &= \frac{15}{8} \Gamma(4)\zeta(4) \quad \text{et donc, comme } \Gamma(4) = 3! = 6 \text{ et } \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} : \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\text{sh } t} dt = \frac{\pi^4}{8}}$$

