Chapitre 2. Nombres complexes

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

I. Propriétés fondamentales de $\mathbb{C}$

▪ ***Définitions.***

· On appelle ensemble des nombres complexes, et l'on note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois + et × définies par :

$$\forall(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases}(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')\\(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)\end{cases}.$$

· On note i le nombre complexe (0, 1).

▪ ***Propriétés de*** $\mathbb{C}$.

· + admet un élément neutre dans $\mathbb{R}^2$ qui est (0, 0).

· × admet un élément neutre dans $\mathbb{R}^2$ qui est (1, 0).

· $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

· Soit E l'ensemble $\{(x, 0), x\in\mathbb{R}\}$. E est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

· Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto (x, 0)$. f est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ sur E.

· ***Conséquence.*** $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, (x, 0) peut être identifié à x. En procédant à cette identification, la restriction à $\mathbb{R}$ des lois + et × de $\mathbb{C}$ sont alors respectivement l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{R}$.

· $i^2 = (-1, 0)$, soit, en procédant à la même identification : $i^2 = -1$.

Programme officiel : "la construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible".

II. Ecriture d'un complexe, module, conjugué

▪ Tout nombre complexe z ($z\in\mathbb{C}$) s'écrit de manière unique $z = a + ib$, avec $(a, b)\in\mathbb{R}^2$. On note :

· $\mathcal{Re}(z) = a$, la partie réelle de z,

· $\mathcal{Im}(z) = b$, la partie imaginaire de z,

· $\overline{z} = a - ib$, le conjugué de z,

· $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, le module de z.

▪ ***Propriétés.*** Soit $(z, z')\in\mathbb{C}^2$. On a :

· $\overline{\overline{z}} = z$, $z\overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ $(z \neq 0)$, $|\overline{z}| = |z|$,

· $z = \overline{z}$ si, et seulement si : $z\in\mathbb{R}$ (i.e. $\mathcal{Im}(z) = 0$), $z = -\overline{z}$ si, et seulement si, z est imaginaire pur (i.e. $\mathcal{Re}(z) = 0$),

· $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,

· $\mathcal{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathcal{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$,

· $|zz'| = |z|\,|z'|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,

· Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f : z \mapsto \overline{z}$. f est un automorphisme involutif (i.e. tel que $f \circ f = f$) de $\mathbb{C}$.

▪ ***Groupe*** $(\mathbb{U}, \times)$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

■ ***Coordonnées polaires.*** Pour tout couple $(x, y)\in\mathbb{R}^2$, il existe un couple $(r, \theta)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$. (r, θ) constitue alors un couple de coordonnées polaires du couple (x, y).

Remarque : si $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique couple (r, θ) de coordonnées polaires de (x, y) vérifiant $(r, \theta)\in\mathbb{R}^{+}\times]-\pi, \pi]$.

III. Exponentielle complexe, argument d'un complexe non nul

1. Exponentielle complexe

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on appelle exponentielle complexe, et on note $e^{i\theta}$, le nombre : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

■ L'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

■ ***Propriétés.***

- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \left|e^{i\theta}\right| = 1,$
- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}},$
- $\forall(\theta, \theta')\in\mathbb{R}^2, e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'},$
- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \left(e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \theta = 2k\pi\right).$

■ ***Formules de Moivre :*** $\forall\theta\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$, soit :

- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}, \cos(n\theta) = \mathcal{Re}(e^{in\theta}) = \mathcal{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n),$
- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}, \sin(n\theta) = \mathcal{Im}(e^{in\theta}) = \mathcal{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n).$

■ ***Formules d'Euler.***

- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$
- $\forall\theta\in\mathbb{R}, \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$

2. Fonction exponentielle complexe

On appelle fonction exponentielle complexe, et l'on note exp, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $z \mapsto e^z = e^{\mathcal{Re}(z)}e^{i\mathcal{Im}(z)}$. Sa restriction à $\mathbb{R}$ est la fonction exponentielle réelle.

■ La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par : $z \mapsto \exp(z)$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

■ ***Propriétés.*** Soit $(z, z')\in\mathbb{C}^2$. On a :

- $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z'),$
- $\exp(z)\in\mathbb{C}^*,$
- $\dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z),$
- $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}),$
- $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi.$

3. Argument d'un complexe non nul, forme trigonométrique

■ Soient $z\in\mathbb{C}^*$ et r son module ($r = |z|$). On appelle argument de z l'unique classe de réels θ ($\theta\in\mathbb{R}$) définie modulo 2π telle que : $z = re^{i\theta}$. On note : $z = [r, \theta]$. On appelle alors chacun des réels θ une détermination de l'argument de z (ou un argument de z), que l'on note $\arg(z)$. On appelle argument principal de z l'unique réel $\theta_0\in]-\pi, \pi]$ tel que : $z = re^{i\theta_0}$, et on

■ ***Définitions.*** Soit $z \in \mathbb{C}$.

• On appelle point image de z, et on note M(z), le point du plan de coordonnées $(\mathcal{R}e(z), \mathcal{I}m(z))$. z est alors appelé affixe de M(z).

• On appelle vecteur image de z le vecteur $\overrightarrow{OM}$. z est alors appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

■ ***Propriétés.*** Soient $(a, z) \in \mathbb{C}^2$, A et M deux points d'affixes respectives a et z. Alors :

• $|z| = d(O, M)$, et : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) + 2k\pi$,

• Le vecteur image de z - a est $\overrightarrow{AM}$, et : $|z - a| = d(A, M)$,

• Le point image de z + a est le quatrième sommet d'un parallélogramme bâti sur les points O, A et M.

2. Configurations géométriques

■ ***Définitions.*** Soient A un point du plan d'affixe a ($a \in \mathbb{C}$), et $r \in \mathbb{R}^+$.

• Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| = r\}$,

• Le disque fermé de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$,

• Le disque ouvert de centre A et de rayon r est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$,

• Le cercle (resp. le disque ouvert, resp. le disque fermé) unité est le cercle (resp. le disque ouvert, resp. le disque fermé) de centre O et de rayon 1.

■ ***Mesure d'angle.*** Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives a, b, c et d ($(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$). On a :

• $\exists k \in \mathbb{Z}$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \arg(d - a) - \arg(c - a) + 2k\pi$, ou, ce qui est équivalent (si $C \neq A$):

• $\exists k \in \mathbb{Z}$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \arg \dfrac{d - a}{c - a} + 2k\pi$.

■ ***Alignement.*** Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c ($(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$).

• O, A et B sont alignés si, et seulement si : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\arg(a) = \arg(b) + k\pi$,

• O, A et B sont alignés et du même côté de O si, et seulement si : $|a| + |b| = |a + b|$, ou, ce qui est équivalent : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\arg(a) = \arg(b) + 2k\pi$,

• A, B et C sont alignés si, et seulement si : $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\arg(b - a) = \arg(c - a) + k\pi$, ou, ce qui est équivalent : $\dfrac{b - a}{c - a} \in \mathbb{R}$.

■ ***Orthogonalité.*** Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b et c ($(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$). On a :

$$AB \perp AC \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(b - a) = \arg(c - a) + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{b - a}{c - a} \text{ est imaginaire pur.}$$

■ ***Isobarycentre.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille de n points du plan d'affixes respectives z_k ($k \in [1, n]$). L'isobarycentre des points M_k ($k \in [1, n]$) est le point d'affixe $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Remarque : si $n \geq 2$, l'isobarycentre des points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ est O, ce qui permet de retrouver que la somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité vaut 0.

3. Transformations du plan complexe

Soit g une application définie sur $\mathbb{C}$, bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Alors il existe une et une seule application f définie sur $\mathcal{P}$ par :

note : $\theta_0 = \operatorname{Arg}(z)$.

■ ***Propriété.*** Si $\theta_0 = \operatorname{Arg}(z)$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta_0 + 2k\pi$ est un argument de z.

■ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si $z = a + ib = [r, \theta]$, alors : $\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \\ \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r+a} \ (\text{si } \theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases}$.

Remarque : 0 n'a pas d'argument principal.

IV. Racines n$^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $\forall k \in [0, n-1]$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \omega^k$, et : $\mathbb{U}_n = \{\omega_k, k \in [0, n-1]\}$.

1. Racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité

■ 1 admet n racines n$^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{C}$ appelés racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité. Ce sont les éléments de $\mathbb{U}_n$.

■ Soit $z \in \mathbb{C}$. Si z est racine de l'unité, $\overline{z}$ l'est aussi.

■ ***Somme et produit.*** La somme des racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle. Leur produit vaut $(-1)^{n-1}$.

■ ***Sous-groupe cyclique*** $\mathbb{U}_n$. $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe cyclique d'ordre n du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

■ Les points images des n racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité forment les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité.

2. Racines n$^{\text{èmes}}$ d'un complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$).

■ z admet n racines n$^{\text{èmes}}$ dans $\mathbb{C}$, qui sont obtenues en faisant le produit de l'une quelconque d'entre elles par les racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité : ce sont les éléments de l'ensemble $\left\{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1]\right\} = \left\{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \omega_k, k \in [0, n-1]\right\}$.

■ ***Somme et produit.*** La somme des racines n$^{\text{èmes}}$ de z est nulle. Leur produit vaut $(-1)^{n-1}z$.

■ Les affixes des n racines n$^{\text{èmes}}$ de z sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

V. Représentation plane

On considère le plan euclidien usuel $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. Le plan complexe

■ Soit f l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $f : z \mapsto (\mathcal{Re}(z), \mathcal{Im}(z))$. f est bijective de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$, et $\mathcal{P}$ muni de f est appelé le plan complexe.

$M(z) \mapsto M'(g(z))$. Cette application est appelée transformation du plan complexe.

▪ ***Symétries, homothéties, translations, rotations.***

- On appelle **symétrie** par rapport au point O l'application f définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(-z)$.
- On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ l'application f définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(\overline{z})$.
- On appelle **homothétie** de centre O et de rapport λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) l'application f définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(\lambda z)$.
- On appelle **translation** de vecteur directeur le vecteur image de a ($a \in \mathbb{C}$) l'application f définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(z + a)$.
- On appelle **rotation** de centre O et d'angle θ ($\theta \in \mathbb{R}$) l'application f définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(e^{i\theta}z)$.

▪ ***Similitudes directes.*** Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et f l'application définie sur $\mathcal{P}$ par : $M(z) \mapsto M'(az + b)$. Alors :

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur directeur le vecteur image de b,
- Si $a \neq 1$, f admet un et un seul point invariant, noté Ω, d'affixe $\frac{b}{1-a}$. En notant r la rotation de centre Ω et d'angle arg(a) et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, on a : $f = h \circ r = r \circ h$. f est appelée la similitude directe de centre Ω, de rapport $|a|$ et d'angle arg(a).

▪ Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$, f une similitude directe de rapport λ, et M et N deux points du plan. Alors : $d\big(f(M), f(N)\big) = \lambda d(M, N)$.

VI. Programme officiel

Hors programme :

- Cocyclicité.
- Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (démonstration à connaître).
- Etude générale des similitudes indirectes.

À la limite du programme :

- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z - z'| \geq \big||z| - |z'|\big|$ (démonstration à connaître).

Chapitre 2. Nombres complexes

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

I. Précisions et rappels

Rappelons que les nombres complexes font partie intégrante du programme. Même si ce chapitre est souvent traité en début d'année, il ne faut pas oublier de le réviser régulièrement, car les nombres complexes peuvent apparaître dans de très nombreux problèmes tant de géométrie, d'analyse que d'algèbre. Il est donc nécessaire de bien en connaître les propriétés fondamentales (notations algébrique et exponentielle, module et argument, racines de l'unité, propriétés géométriques).

II. Utiliser les notations algébrique et trigonométrique

1. Utiliser la notation algébrique

La notation algébrique ($z = a + ib$) peut être utile dans les calculs de somme, ou dans les résolutions d'équations complexes. Elle permet notamment de faire des identications entre partie réelle et partie imaginaire, ce qui peut être utile dans le cadre de résolutions d'équations complexes par exemple.

Attention : la partie imaginaire du complexe z n'est pas ib, mais b (la partie imaginaire de z est donc un nombre réel).

☞ Voir l'exercice : Opérations sur les partie réelle et imaginaire.

2. Utiliser la notation trigonométrique

La notation trigonométrique ($z = \rho e^{i\theta}$) offre plus de facilités lors de calculs de produits et/ou de sommes faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Dans de très nombreux cas, la notation trigonométrique est plus utile que la notation algébrique.

Ne pas oublier qu'il n'y a unicité du module et de l'argument que si z est différent de 0 (0 admettant une infinité d'arguments possibles, donc pas d'argument principal), et que le réel ρ doit être strictement positif pour être interprété comme le module de z. Dans le cas où z s'écrit sous forme $z = re^{i\alpha}$ avec $r < 0$, penser que $e^{i\pi} = -1$, ce qui permet de revenir à une forme trigonométrique en posant $z = (-r)e^{i(\alpha+\pi)}$.

Veiller à ne pas confondre forme exponentielle d'un complexe ($z = \rho e^{i\theta}$) et exponentielle d'un nombre complexe, qui est le nombre complexe défini par $e^z = e^{\mathcal{Re}(z)}e^{i\mathcal{Im}(z)}$.

☞ Voir l'exercice : "Résolution d'équation".

3. Utiliser à la fois les notations algébrique et trigonométrique

Il peut arriver que l'on utilise à la fois la notation algébrique ($z = a + ib$) et la notation trigonométrique ($z = \rho e^{i\theta}$) d'un nombre complexe. Se souvenir des relations reliant a, b, ρ et θ :

$$\text{Si } z = a + ib = [r, \theta], \text{ alors : } \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \\ \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{b}{r+a} \ (\text{si } \theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases}$$

III. Résoudre des équations entre nombres complexes

1. Résoudre une équation du type $z^n = 1$

Se souvenir que les racines n-èmes de l'unité sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1]\right\}$. Se souvenir que $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe commutatif.

☞ Voir la fiche de cours.

2. Résoudre une équation du type $z^n = Z$, où Z est un nombre complexe connu

Pour déterminer les solutions d'une équation du type $z^n = Z = \rho e^{i\theta}$, on peut :

– se ramener au cours : les solutions de l'équation sont les éléments de l'ensemble : $\left\{\sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k \in [0, n-1]\right\}$,

– déterminer une racine particulière z_0 de l'équation $z^n = Z$, puis faire le produit de cette racine avec toutes les racines n-èmes de l'unité, les solutions étant ainsi les éléments de l'ensemble : $\left\{z_0\omega_k, k \in [0, n-1]\right\}$, où : $\forall k \in [0, n-1]$, $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

☞ Voir l'exercice : "Racine carrée d'un nombre complexe".

3. Résoudre une équation du type $f(z) = g(Z)$, où f et g sont deux fonctions et Z un nombre complexe connu

Pour résoudre une équation entre deux nombres complexes, on peut :

– écrire chacun des nombres complexes en présence sous forme algébrique, puis identifier leur partie réelle et leur partie imaginaire,

– écrire chacun des nombres complexes en présence sous forme trigonométrique, puis identifier leur module et leur argument (à 2π près s'il ne s'agit pas nécessairement de leur argument principal).

☞ Voir l'exercice : "Résolution d'équation".

4. Résoudre un système d'équations à coefficients complexes

Pour résoudre une équation entre deux nombres complexes, on peut :

– résoudre chacune des équations complexes (cf. point III.3 ci-dessus),

– se souvenir qu'une équation entre nombres complexes équivaut à deux équations entre nombres réels, en identifiant leur partie réelle et leur partie imaginaire, ou leur module et leur argument (à 2π près s'il ne s'agit pas nécessairement de leur argument principal),

– se ramener aux méthodes de résolution de systèmes, notamment à l'aide des matrices (cf. chapitre "**Systèmes linéaires et calcul matriciel**").

☞ Voir l'exercice : "Résolution de système".

5. Résoudre des inégalités faisant intervenir des nombres complexes

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : écrire des inégalités entre les nombres complexes eux-mêmes. En effet, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas un ensemble totalement ordonné (sur les relations d'ordre partiel et total, cf. chapitre "**Préliminaires**"). Le plus souvent, les inégalités faisant intervenir des nombres complexes porteront sur leur module, ou, plus rarement, sur leur argument.

Pour résoudre ou démontrer une inégalité faisant intervenir des nombres complexes, on peut :

– utiliser l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$: $\forall(z, z')\in\mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$,

– utiliser, après l'avoir démontrée à l'aide de la première (à l'aide d'une décomposition de la forme : $z = (z - z') + z'$), la deuxième inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$: $\forall(z, z')\in\mathbb{C}^2, |z| - |z'| \leq |z - z'|$.

☞ Voir l'exercice : "Deuxième inégalité triangulaire".

IV. Linéariser, délinéariser une expression trigonométrique circulaire

1. Linéariser une expression trigonométrique circulaire de la forme $\cos^n x$ ou $\sin^n x$.

Pour linéariser une expression trigonométrique circulaire de la forme $\cos^n x$ (resp. $\sin^n x$), on peut successivement :

– appliquer une formule d'Euler à l'expression trigonométrique $\cos x$ (resp. $\sin x$),

– élever l'expression obtenue à la puissance n à l'aide de la formule du binôme,

i) si n est pair (la somme comporte alors $n + 1$ termes, soit un nombre impair de termes), scinder la somme en trois parties : les n premiers termes, le terme médian, les n derniers termes,
ii) si n est impair (la somme comporte alors $n + 1$ termes, soit un nombre pair de termes), scinder la somme en deux parties : les n premiers termes et les n derniers termes,

– effectuer dans la seconde somme un changement d'indice approprié afin de regrouper les nombres complexes deux à deux conjugués (attention : ce changement d'indice n'est en général pas trivial),

– une fois rassemblés les nombres complexes deux à deux conjugués, réutiliser une formule d'Euler.

La linéarisation permet de passer d'une expression sous forme de puissance de de $\cos x$ (resp. $\sin x$) à une expression sous forme de somme de fonctions de la forme $\cos (kx)$ (resp. $\sin (kx)$), où $k\in\mathbb{N}$. Elle s'avère particulièrement utile pour calculer les (très classiques) intégrales "de Wallis" (intégrales de puissances de fonctions trigonométriques), à l'aide de la linéarité de l'intégration.

☞ Voir l'exercice : "Linéarisation de $\cos^n x$, de $\sin^n x$".

2. Délinéariser une expression trigonométrique circulaire de la forme $\cos nx$ ou $\sin nx$

Pour délinéariser une expression trigonométrique circulaire de la forme $\cos nx$ ou $\sin nx$, on peut successivement :

– écrire l'expression trigonométrique $\cos nx$ (resp. $\sin nx$) comme la partie réelle (resp. imaginaire) de e^{inx},

– utiliser la formule de Moivre en écrivant $e^{inx} = (e^{ix})^n$,

– écrire e^{ix} sous forme de somme en utilisant la définition de e^{ix},

– développer $(\cos x + i\sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme,

– en utilisant la linéarité de l'opérateur partie réelle (resp. partie imaginaire), ne conserver dans la somme que les puissances paires (resp. impaires) de i, en distinguant si nécessaire suivant la parité de n (en pratique, cette distinction n'est pas nécessaire pour la fonction cosinus, mais est indispensable pour la fonction sinus).

La délinéarisation permet de passer d'une expression linéaire à une expression sous forme de combinaison linéaire des puissances de $\cos x$ (resp. $\sin x$), i.e. sous forme de polynôme en $\cos x$ (resp. $\sin x$). Elle s'avère particulièrement utile pour déterminer une expression sous forme de somme des (très classiques) polynômes "de Tchebychev" (polynômes caractérisés par l'identité : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in [0, \pi]$, $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$).

☞ Voir l'exercice : "Délinéarisation de cos nx, de sin nx".

V. Calculer des sommes d'expressions trigonométriques à l'aide des nombres complexes

1. Si la somme est une somme d'expressions trigonométriques de la forme cos kx, sin kx

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : délinéariser chacun des termes, puis sommer l'expression obtenue. On parvient à une double somme faisant intervenir des parties entières, qu'il n'est pas facile d'inverser, et qui ne donne le résultat souhaité qu'après de très longues simplifications.

Pour calculer une somme d'expressions trigonométriques faisant intervenir des fonctions circulaires cos kx (resp. sin kx), on peut successivement :

– écrire chacun des termes de la somme comme la partie réelle (resp. imaginaire) de e^{ikx},

– utiliser la linéarité de l'opérateur "partie réelle" (resp. "partie imaginaire") pour faire apparaître une somme de nombres complexes écrite sous forme trigonométrique,

– utiliser la formule de Moivre en écrivant $e^{ikx} = (e^{ix})^k$,

– N.B. : à ce stade, il faut éviter d'écrire e^{ix} sous forme de somme puis utiliser la formule du binôme, ce qui reviendrait à délinéariser chacun des termes, cf. remarque préliminaire ci-dessus,

– remarquer que l'on est en présence de la somme des termes d'une suite géométrique : après avoir traité à part, le cas échéant, le cas où la raison est égale à 1 (i.e. le cas où $e^{ix} = 1$, i.e. le cas où $x \in 2\pi\mathbb{Z}$), calculer cette somme à l'aide des résultats du cours sur les suites géométriques,

– factoriser dans l'expression obtenue, au numérateur et au dénominateur, par les "exponentielles moitiés", ce qui permet de faire apparaître des nombres complexes deux à deux conjugués écrits sous forme exponentielle,

– une fois ces termes deux à deux rassemblés, utiliser une formule d'Euler,

– enfin, après avoir pris la partie réelle (resp. imaginaire) de l'expression obtenue, conclure en utilisant une formule de trigonométrie circulaire classique du type $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$, afin de simplifier le résultat.

☞ Voir l'exercice : "Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$".

2. Si la somme est une somme d'expressions trigonométriques de la forme cos (a + kx), sin (a + kx)

Pour calculer une somme d'expressions trigonométriques faisant intervenir des fonctions circulaires cos (a + kx) (resp. sin (a + kx)), on peut successivement :

– écrire chacun des termes de la somme comme la partie réelle (resp. imaginaire) de $e^{i(a+kx)}$,

– après avoir utilisé la linéarité de l'opérateur "partie réelle" (resp. "partie imaginaire"), factoriser par e^{ia}, indépendant de k,

– si des coefficients binômiaux apparaissent dans les termes de la somme, utiliser la formule du binôme,

– sinon, se ramener alors à la méthode détaillée au point V.1 ci-dessus.

☞ Voir l'exercice : "Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$".

3. Si la somme est une somme de puissances d'expressions trigonométriques de la forme cos (a + kx), sin (a + kx)

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : appliquer l'opérateur "partie réelle" pour faire apparaître une exponentielle complexe. Si cette méthode est très utile dans le cadre des calculs de somme (cf. points V.1 et V.2 ci-dessus), elle ne trouve pas à s'appliquer lorsque les expressions en présence sont des puissances : en effet, la partie réelle d'un produit de nombres complexes n'est pas le produit des parties réelles de ces nombres complexes.

Pour calculer une somme de puissances d'expressions trigonométriques faisant intervenir des fonctions circulaires cos (a + kx) (resp. sin (a + kx)), on peut successivement :

– appliquer la formule d'Euler à l'expression trigonométrique en présence,

– développer la puissance qui apparaît à l'aide de la formule du binôme,

– rassembler les exponentielles à l'aide de la formule de Moivre et de la formule : $\forall(\theta, \theta')\in \mathbb{R}^2$, $e^{i(\theta+\theta')}= e^{i\theta}e^{i\theta'}$,

– inverser les deux sommes (la première somme, et la seconde qui provient de la formule du binôme), en prenant un soin particulier aux indices (voir chapitre "**Préliminaires**" pour les inversions de sommes),

– en faisant apparaître une puissance convenable à l'aide de la formule de Moivre dans la seconde somme, se ramener à la somme des termes d'une suite géométrique, en prenant soin de distinguer suivant que la raison est égale ou différente de 1.

☞ Voir l'exercice : "Calcul de $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right)^{k+1}$ ".

4. Si la somme est une somme d'expressions hyperbolique de la forme ch (a + kx), sh (a + kx)

Pour calculer une somme d'expressions trigonométriques faisant intervenir des fonctions hyperboliques ch (a + kx) (resp. sh (a + kx)), on peut appliquer directement la définition des fonctions ch et sh. Il n'y a alors pas lieu de faire apparaître des nombres complexes, car les exponentielles en présences sont des exponentielles réelles, et non complexes (cf. chapitre "**Fonctions usuelles**").

☞ Voir l'exercice : "Calcul de $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\,(a + kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}\,(a + kx)$", dans le polycopié "**Fonctions usuelles**".

VI. Résoudre un problème de géométrie du plan à l'aide de nombres complexes

1. Résoudre un problème d'alignement

Pour résoudre à l'aide de nombres complexes un problème d'alignement entre trois points on peut successivement :

– se souvenir que des points A, M et M' sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires,

– déterminer l'affixe de chacun de ces points, et en déduire, par différence, l'affixe de chacun des vecteurs,

– exprimer la relation de colinéarité souhaitée entre les vecteurs par une relation de colinéarité entre les modules de leurs affixes, ou par une relation d'égalité entre les arguments des affixes des vecteurs (modulo π près s'il ne s'agit pas de leur argument principal),

– on se ramène alors à une équation entre nombres complexes, à résoudre en identifiant partie réelle et partie imaginaire, ou module et argument (cf. point III. ci-dessus).

S'il faut montrer que des points sont alignés du même côté de O, on peut également se souvenir que des points sont alignés et du même côté de O si, et seulement si, le module de la somme de leurs affixes est égal à la somme des modules de leurs affixes. Cette propriété peut se généraliser à n points ($n \geq 2$).

☞ Voir l'exercice : "Points définis par leurs affixes".

2. Résoudre un problème de distance

Pour résoudre un problème de distance entre plusieurs points (construction d'un triangle isocèle ou équilatéral, construction d'un polygône régulier par exemple) à l'aide des nombres complexes on peut successivement :

– se souvenir qu'une distance entre deux points M et M' s'interprète comme le module de l'affixe vecteur $\overrightarrow{MM'}$,

– déterminer l'affixe de chacun des points en présence, et en déduire, par différence, l'affixe de chacun des vecteurs et donc leur module,

– exprimer la relation de distance entre les points par une relation d'égalité entre des modules,

– on se ramène alors à une équation entre des modules de nombres complexes, à résoudre en identifiant partie réelle et partie imaginaire, ou module et argument (cf. point III. ci-dessus).

☞ Voir l'exercice : "Construction d'un triangle isocèle".

3. Résoudre un problème d'orthogonalité

Pour résoudre un problème d'orthogonalité à l'aide des nombres complexes, on peut :

– essayer de se ramener à un problème de distance ou d'alignement à l'aide de relations d'équivalence, car ces problèmes offrent plus de métodes de résolution possibles (à l'aide des arguments, mais aussi à l'aide des modules),

– montrer que les arguments de leurs affixes sont distants de $\frac{\pi}{2}$ (modulo π s'il ne s'agit pas de leur argument principal).

☞ Voir l'exercice : "Construction d'un triangle isocèle"

4. Déterminer un lieu géométrique à partir de points équirépartis sur le cercle unité

Pour déterminer à l'aide de nombres complexes un lieu géométrique à partir de n points équirépartis sur le cercle unité, on peut :

– déterminer l'affixe de tous les points situés sur le cercle unité en en déterminant l'affixe d'un point particulier, puis en faisant le produit de cette affixe par chacune des racines n-èmes de l'unité,

– faire apparaître, le cas échéant à l'aide de la relation de Chasles, des expressions simplifiables à l'aide du cours sur les racines n-èmes de l'unité, comme par exemple la somme des racines n-èmes de l'unité (qui vaut 0) ou le produit de celles-ci (qui vaut $(-1)^{n-1}$).

☞ Voir l'exercice : "Points définis par leurs affixes".