Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Maths SUP

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche de cours

I. Formules de Taylor

▪ ***Formule de Taylor avec reste intégral.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et $(a, b) \in I^2$. On a : $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ (formule appliquée à l'ordre n).

▪ ***Majoration du reste, inégalité de Taylor-Lagrange.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I, $(a, b) \in I^2$ et M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur le segment d'extrémités a et b. On a :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque : cette propriété reste valable si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n+1)}$ est bornée sur le segment d'extrémités a et b.

▪ ***Formule de Taylor-Lagrange (à la limite du programme).*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et (a, b) un couple d'éléments distincts de I. Il existe un réel c appartenant à l'intervalle ouvert d'extrémités a et b tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

▪ ***Formule de Taylor-Young.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. Il existe une fonction ε continue sur I telle que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0.$$

II. Développements limités

▪ ***Définition.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un pint, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. On dit que f admet un développement limité (d.l.) à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe une suite de réels $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction ε définie sur I tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

- Le terme $\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ s'appelle "partie régulière" du d.l., noté $reg_n(f)$,
- Le terme $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ s'appelle "reste" ou "terme complémentaire" du d.l.

▪ ***Unicité du développement limité.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, sa partie régulière et son reste sont uniques.

▪ ***Développement limité à l'ordre 0.*** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f n'est pas définie en x_0, f admet un d.l. à l'ordre 0 au voisinage de x_0

si et seulement si f a une limite finie ℓ en x_0, et on a alors : $f(x) = \ell + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Si f est définie en x_0, f admet un d.l. à l'ordre 0 au voisinage de x_0 si et seulement si f est continue en x_0, et on a alors : $f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

▪ ***Développement limité à l'ordre 1.*** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x_0, f admet un d.l. à l'ordre 1 au voisinage de x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0, et on a alors : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Dans ce cas, on dit que la fonction $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ est une approximation affine de f au voisinage de x_0.

▪ ***Développement limité à l'ordre 2 et tangente.*** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un d.l. à l'ordre 2 au voisinage de x_0 de la forme : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) a + \frac{(x - x_0)^2}{2} b + (x - x_0)^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, on a $f'(x_0) = a$ et f admet pour tangente en x_0 la droite d'équation : $y = f(x_0) + (x - x_0) a$. De plus, la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de x_0 peut être obtenue à l'aide du signe de b si $b \neq 0$.

▪ ***Le cas des fonctions de classe C^n au voisinage de x_0.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur I et $x_0 \in I$. D'après la formule de Taylor-Young, f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et ce d.l. est : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : La réciproque est fausse (une fonction peut admettre un d.l. d'ordre n sans être de classe C^n)

▪ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$. Si f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0, alors f admet un d.l. à tout ordre p inférieur ou égal à n au voisinage de x_0 et $reg_p(f) = \overline{reg_n(f)}^{\,p}$ (partie tronquée au degré p de $reg_n(f)$).

▪ ***Développement limité d'une dérivée.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in I$, f une fonction définie et dérivable sur I. Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage de x_0, et si f' admet un d.l. d'ordre n - 1 au voisinage de x_0, alors la partie régulière du d.l. d'ordre n - 1 de f' est la dérivée de la partie régulière du d.l. d'ordre n de f au voisinage de x_0.

▪ ***Développement limité d'une primitive.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, f une fonction définie et continue sur I et F une primitive de f sur I. Si f admet un d.l. d'ordre n au voisinage de x_0, alors F admet un d.l. d'ordre n + 1 au voisinage de x_0, et la partie régulière du d.l. d'ordre n + 1 de F est la primitive de la partie régulière du d.l. d'ordre n de f au voisinage de x_0 qui prend la valeur $F(x_0)$ en x_0.

III. Opérations sur les développements limités

▪ ***Somme.*** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0, alors f + g admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et $reg_n(f + g) = reg_n(f) + reg_n(g)$.

▪ ***Produit par un réel.*** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0, alors λf admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et $reg_n(\lambda f) = \lambda\, reg_n(f)$.

▪ ***Produit.*** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0, alors fg admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et $reg_n(fg) = \overline{reg_n(f)\, reg_n(g)}^{\,n}$.

▪ ***Composition.*** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et si g admet un d.l. à l'ordre n en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0.

▪ ***Quotient.*** Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0.

▪ ***Changement de variable*** (hors-programme). Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction $g : u \mapsto f(u + x_0)$ admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0.

■ ***Développement limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 :***

• $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$,

• $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$,

• $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$,

• $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$,

• $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$,

• $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$,

• $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$,

• $\mathrm{ch}\, x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$,

• $\mathrm{sh}\, x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2}\varepsilon(x)$.

IV. Notion de développement asymptotique

La notion générale de développement asymptotique, ainsi que celle d'échelle de comparaison, sont hors-programme. Cependant, le programme officiel évoque la connaissance d' "exemples simples de développements asymptotiques".

Ce qu'il faut retenir : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I et $x_0\in I$. Ecrire un développement asymptotique de f au voisinage de x_0, c'est écrire, au voisinage de x_0, f(x) sous forme d'une somme de termes de telle sorte ces termes soient écrits dans l'ordre de prépondérance, autrement dit de telle sorte que chaque terme soit négligeable devant le terme précédent au voisinage de x_0.

Par exemple, si au voisinage de 0 on a : $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x} + x\ln(x) + x^2\sqrt{x}\ln(x) + x^2\sqrt{x}\ln(x)\,\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$,

alors $\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x} + x\ln(x) + x^2\sqrt{x}\ln(x)\right)$ constitue un développement asymptotique de f au voisinage de 0.

Ce résultat peut être étendu aux cas où $x_0\notin I$ mais se trouve à la frontière de I, ou encore pour $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$ si I n'et pas majoré (resp. pas minoré).

V. Programme officiel

A la limite du programme

• Formule de Taylor pour les polynômes.

Hors programme

• Etude systématique des développements asymptotiques.

• Résultats généraux sur les développements limités de fonctions composées.

Chapitre 16. Formules de Taylor. Développements limités

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

0. Apprendre et comprendre son cours

Penser que :

- quand on applique l'une des formules de Taylor, l'ordre d'application est l'indice du dernier terme de la somme,
- quand on applique l'une des formules de Taylor entre deux réels a et b, il n'y a pas d'ordre a priori entre a et b,
- un développement limité ne donne d'information précise que lorsque l'on est au voisinage d'un point précis (en général 0) : on ne peut donc démontrer aucun résultat utile "pour tout x".

I. Déterminer le développement limité d'une fonction au voisinage d'un point

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer un d.l. au voisinage de 0

Pour déterminer un d.l. au voisinage de 0 d'une fonction h, on peut :

- si la fonction est la somme et/ou le produit de fonctions dont un connaît un d.l. au voisinage de 0, utiliser les opérations sur les développements limités (voir la fiche de cours),
- si la fonction est un quotient de fonctions dont on connaît un développement limité au voisinage de 0

■ ***Si la fonction est la somme de fonctions dont on connaît un développement limité au voisinage de 0.***

Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage, alors f + g admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0 et :
$\mathrm{reg}_n(f+g) = \mathrm{reg}_n(f) + \mathrm{reg}_n(g)$.

■ ***Si la fonction est le produit de fonctions dont on connaît un développement limité au voisinage de 0.***

Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0, alors fg admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0 et :
$\mathrm{reg}_n(fg) = \overline{\mathrm{reg}_n(f)\,\mathrm{reg}_n(g)}^{\,n}$ (partie tronquée à l'ordre n du produit des deux parties régulières à l'ordre n).

■ ***Si la fonction est le quotient de fonctions dont on connaît un développement limité au voisinage de 0.***

Si f et g admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0 et si $g(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0.

■ ***Si la fonction est la composée de fonctions dont on connaît un développement limité.***

Si f admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0 et si g admet un d.l. à l'ordre n en f(0), alors $g \circ f$ admet un d.l. à l'ordre n au voisinage de 0.

■ ***Si la fonction est de classe C^n au voisinage de x_0 :*** on peut alors utiliser la formule de Taylor-Young.

■ ***Si la fonction est paire (resp. impaire)***, utiliser l'unicité du développement limité pour montrer que le d.l. au voisinage de 0 de f ne contient que des monômes pairs (resp. impairs),

■ ***Si la fonction est solution d'une équation fonctionnelle ou différentielle***, dériver ou intégrer le d.l. (à coefficients inconnus) au voisinage de 0 de f

2. Déterminer un d.l. au voisinage d'un point par changement de variable

Pour détermienr un d.l. à l'ordre n de f au voisinage d'un point x_0 non nul, on peut :

■ appliquer l'une des méthodes précédentes, en substituant x_0 à 0,

■ procéder par changement de variable, en déterminant un d.l. au voisinage de 0 de la fonction $g : u \mapsto f(u + x_0)$

II. Application des développements limités

1. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable en un point

Penser que, pour montrer qu'une fonction définie en x_0 est continue (resp. dérivable) en un point x_0, on peut montrer qu'elle admet un développement limité d'ordre 0 (resp. d'ordre 1) au voisinage de x_0.

2. Déterminer un équivalent d'une fonction au voisinage d'un point

Se souvenir que toute fonction admettant un développement limité en un point est équivalente, au voisinage de ce point, à sa partie régulière (si celle-ci n'est pas la fonction nulle).

Penser également que, pour déterminer un équivalent d'une fonction non explicitée numériquement, on peut utiliser la formule de Taylor-Young (exemple : $x \mapsto f(x) - f(0) - x f'(0)$).

3. Obtenir l'équation de la tangente en un point et la position de la courbe par rapport à cette tangente

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f admet un d.l. à l'ordre 2 au voisinage de x_0 de la forme : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, a + \frac{(x - x_0)^2}{2} b + (x - x_0)^2 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, on a $f'(x_0) = a$ et f admet pour tangente en x_0 la droite d'équation : $y = f(x_0) + (x - x_0)\, a$. De plus, la position de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de x_0 peut être obtenue à l'aide du signe de b si $b \neq 0$. Si $b = 0$, il faut déterminer un développement limité à un ordre supérieur.

4. Obtenir l'équation d'une asymptote oblique à la courbe au voisinage de l'infini

Si au voisinage de $\pm\infty$, on a : $f(x) = a x + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$, f admet pour asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$ la droite d'équation : $y = a x + b$.

III. Application des formules de Taylor

1. Encadrer une fonction par deux fonctions polynomiales

Précisons tout d'abord ce qu'il ne faut pas faire : utiliser un d.l. En effet, un développement limité est une notion locale qui ne permet jamais d'obtenir une égalité globale ("pour tout x").

Pour encadrer une fonction f par deux fonctions polynomiales, on peut :

- utiliser la formule de Taylor avec reste intégral, puis montrer que le reste intégral est de signe constant, ce qui permet (dn fonction du signe du reste) de majorer ou de minorer f par une fonction polynomiale,
- utiliser la formule de Taylor-Lagrange (à la limite du programme), puis montrer que le reste (qui est de la forme $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$) est de signe constant (ce qui est notamment le cas lorsque $f^{(n+1)}$ est de signe constant), ce qui permet (dn fonction du signe du reste) de majorer ou de minorer f par une fonction polynomiale,
- si une des minoration/majoration à obtenir fait apparaître une fonction affine (i.e. une fonction polynomiale de degré 1), si cette fonction apparaît comme étant l'équation d'une tangente à la courbe de f en un point ou bien l'équation d'une corde de la courbe de f, examiner si f est convexe (resp. concave) et utiliser les propriétés des fonctions convexes (resp. concaves) : voir le chapitre "**Fonctions : limite, continuité, dérivabilité**"),
- seulement si aucune de ces méthodes ne fonctionne, former la différence des deux fonctions et étudier cette différence (voir le chapire "**Fonctions : limite, continuité, dérivabilité**").

Cette méthode fonctionne notamment lorsque l'on reconnaît, dans les fonctions polynomiales qu'il s'agit de faire apparaître, le développement limité de f en un point à un certain ordre, car par unicité du développement limité, la partie régulière du développement limité se trouve être égale à la somme qui apparaît dans les formules de Taylor. Attention toutefois à ne pas utiliser simplement le d.l. qui est une notion locale, comme cela a été rappelé plus haut.

2. Majorer la somme partielle d'une série, montrer qu'une série converge et déterminer sa somme (hors-programme en première année)

- ***Majorer la somme partielle d'une série dont le terme général est de la forme*** $\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$.

- ***Déterminer la somme d'une série dont le terme général est de la forme*** $\frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$. Pour cela, on peut soit appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange puis utiliser le théorème de l'encadrement, soit appliquer la formule de Taylor avec reste intégral puis déterminer la limite du reste (en général 0).