Chapitre 14.
Intégration sur un segment

Maths SUP

***OPTIMAL** SUP-SPE*

Fiche de cours

Dans tout le cours, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Dans les parties I, II, III et IV, les fonctions sont supposées à valeurs réelles. Dans la partie V, les fonctions sont supposées à valeurs complexes. Enfin, à partir de la partie VI, les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes.

I. Fonctions continues par morceaux. Fonctions en escalier.

▪ ***Fonction en escalier.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. f est en escalier s'il existe une suite finie $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i\in [\![0, n-1]\!]$, f soit constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. *Exemple : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ou $x \mapsto Ent(x)$ est une fonction en escalier.*

▪ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$. $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}, +, .)$ et un sous-anneau (commutatif) de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}, +, \times)$.

▪ ***Fonction continue par morceaux.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une suite finie $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i\in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Remarque : lorsque f est définie sur un intervalle I quelconque, on dit que f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux sur ce segment.

▪ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $\mathscr{M}([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. $\mathscr{M}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}, +, .)$ et un sous-anneau (commutatif) de $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R}, +, \times)$.

▪ ***Subdivision d'un segment subordonnée à une fonction.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, b]$. On appelle subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f (ou adaptée à f) toute suite finie $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i\in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

▪ ***Approximation des fonctions continues par morceaux.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ définies et en escalier sur $[a, b]$ telles que : $\forall x\in [a, b]$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et : $\forall x\in [a, b]$, $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$.

II. Intégrale d'une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un segment

▪ ***Intégrale d'une fonction en escalier.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f une fonction en escalier sur $[a, b]$, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à f, et pour tout $i\in [\![0, n-1]\!]$, k_i la valeur de f sur $]x_i, x_{i+1}[$. On appelle intégrale de f de a à b, et on note $\int_a^b f(t)\,dt$, le nombre : $\sum_{i=0}^{n-1} k_i\,(x_{i+1} - x_i)$.

▪ ***Intégrale d'une fonction continue par morceaux.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f une fonction continue par morceaux sur

$[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$, et on note $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$, le nombre égal à la fois à la borne inférieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier majorant f et à la borne supérieure de l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier minorant f.

■ ***Définition de*** $\int_a^b f(t)\,dt$. Soient $(a, b)\in I^2$. On note $\int_a^b f(t)\,dt$, le nombre égal à $\int_{[a,b]} f$ si $a < b$, égal à 0 si $a = b$, et égal à $-\int_{[b,a]} f$ si $a > b$.

■ ***Interprétation géométrique.*** Soient $(a, b)\in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire du domaine défini par : $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.

III. Propriétés de l'intégration

■ ***Relation de Chasles.*** Soient f une fonction continue par morceaux sur I et a, b et c trois éléments de I. On a : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

■ ***Linéarité de l'intégration.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. On a : $\forall(\alpha, \beta)\in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

■ ***Positivité de l'intégration.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux et **positive** sur $[a, b]$. On a : $\int_a^b f(t)\,dt \ge 0$.

Propriété : <u>si f est continue et positive sur [a, b]</u> : $\int_a^b f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \forall t\in [a, b], f(t) = 0$.

■ ***Croissance de l'intégration.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ vérifiant : $\forall t\in [a, b], f(t) \le g(t)$. On a : $\int_a^b f(t)\,dt \le \int_a^b g(t)\,dt$.

■ ***Inégalité de la moyenne.*** Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. On a :

$$\left|\int_{[a,b]} fg\right| \le \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|.$$

Conséquence : soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On a :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \le \int_{[a,b]} |f| \le (b - a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

IV. Primitives et intégrale fonction de sa borne supérieure

■ ***Primitive***. Soit f une fonction définie sur I. F est une primitive de f si F est définie et dérivable sur I de dérivée f.

Propriétés :

- Toute fonction f continue sur I possède au moins une primitive F sur I. Les autres primitives G de f sur I s'écrivent $G = F + \alpha$ $(\alpha\in \mathbb{R})$.

- Soient $(a, b)\in I^2$, $a < b$, f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I. Le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(t)]_a^b$ est indépendant du choix de F. De plus, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

■ ***Intégrale fonction de sa borne supérieure.*** Soient a un élément de I et f une fonction continue sur I. La fonction F définie sur I par : $\forall x\in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I de dérivée f, donc de classe C^1 sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a. En particulier, si f est de classe C^1 sur I, on a : $\forall x\in I$, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

V. Extension des paragraphes I, II et III aux fonctions à valeurs complexes

Dans toute cette partie, les fonctions sont supposées **à valeurs complexes**.

1. Fonctions continues par morceaux, définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes

▪ ***Fonction à valeurs complexes continue par morceaux.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une suite finie $(x_i)_{0 \le i \le n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) strictement croissante de points de $[a, b]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$ tels que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Remarque : lorsque f est définie sur un intervalle I quelconque, on dit que f est continue par morceaux sur I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux sur ce segment.

▪ ***Intégrale d'une fonction à valeurs complexes continue par morceaux.*** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$, et on note $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$, le nombre :
$\int_{[a,b]} \mathcal{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \mathcal{Im}(f)$.

2. Propriétés de l'intégration pour une fonction à valeurs complexes

▪ ***Relation de Chasles.*** Soient f une fonction définie et continue par morceaux sur I et a, b et c trois éléments de I. On a :
$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

▪ ***Linéarité de l'intégration.*** Soient $(a, b) \in I^2$, $a < b$, f et g deux fonctions définies et continues par morceaux sur $[a, b]$. On a : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt$.

▪ ***Inégalité de la moyenne.*** Soient $(a, b) \in I^2$, $a < b$, f une fonction définie et continue par morceaux sur $[a, b]$. On a :
$\left|\int_{[a,b]} f\right| \le \int_{[a,b]} |f| \le (b-a) \sup_{[a,b]} |f|$.

3. Primitives et intégrale fonction de sa borne supérieure pour une fonction à valeurs complexes

▪ ***Primitive***. Soit f une fonction définie sur I. F est une primitive de f si F est définie et dérivable sur I de dérivée f.

Propriétés :

- Toute fonction f définie et continue sur I possède au moins une primitive F sur I. Les autres primitives G de f sur I s'écrivent $G = F + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).
- Soient $(a, b) \in I^2$, $a < b$, f une fonction définie et continue sur I et F une primitive de f sur I. Le nombre réel $F(b) - F(a)$, noté $[F(t)]_a^b$ est indépendant du choix de F. De plus, on a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

▪ ***Intégrale fonction de sa borne supérieure.*** Soient a un élément de I et f une fonction continue sur I. La fonction F définie sur I par : $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I de dérivée f, donc de classe C^1 sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Dans la suite du cours, les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

VI. Méthodes de calcul intégral

Soit (a, b) un couple d'éléments de I.

▪ ***Calcul de primitive.*** Soit f une fonction continue par morceaux sur I. Si f admet une primitive F sur I, alors :
$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Primitives usuelles : si les intégrales suivantes ont un sens, on a :

- $\int_a^b (f'(t)g(t) + g'(t)f(t))\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b$,

- $\int_a^b ((g' \circ f)(t) \times f'(t))\,dt = [(g \circ f)(t)]_a^b$,

- $\int_a^b (n\,f^{n-1}(t)\,f'(t))\,dt = [f^n(t)]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{-f'(t)}{f^2(t)}\,dt = \left[\frac{1}{f(t)}\right]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = [\sqrt{t}]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}\,dt = [\sqrt{f(t)}]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{1}{t}\,dt = [\ln|t|]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = [\ln|f(t)|]_a^b$,

- $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\int_a^b t^\alpha\,dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_a^b$,

- si $\alpha \neq 0$ et si $\beta \geq 1$, $\int_a^b t^{\beta-1} e^{\alpha t^\beta}\,dt = \left[\frac{e^{\alpha t^\beta}}{\alpha\beta}\right]_a^b$,

- $\int_a^b \sin t\,dt = [-\cos t]_a^b$,

- $\int_a^b \cos t\,dt = [\sin t]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_a^b (1 + \tan^2 t)\,dt = [\tan t]_a^b$,

- $\int_a^b -\frac{1}{\sin^2 t}\,dt = \int_a^b (-1 - \text{cotan}^2 t)\,dt = [\text{cotan}\,t]_a^b$,

- $\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\text{Arctan}\,t]_a^b$.

■ ***Intégration par parties.*** Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I. On a :

$$\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt.$$

■ ***Changement de variable.*** Soient f une fonction continue sur I et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(J) \subset I$. En effectuant le changement de variable $u = \varphi(t)$, $du = \varphi'(t)\,dt$, on a, avec $(\alpha, \beta) \in J^2$:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,du.$$

Conséquences :

– si f est paire : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$,

– si f est impaire : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{-a}^{-b} f(t)\,dt$ et $\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$,

– si f est périodique de période T ($T \in \mathbb{R}_+^*$) : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt$ et $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$.

VII. Méthode des rectangles. Valeur moyenne d'une fonction

▪ ***Méthode des rectangles.*** Soient $(a, b) \in I^2$, $a < b$, et f une fonction continue sur [a, b]. On appelle sommes de Riemann de pas régulier associées à f, les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} s_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right) \\ S_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\dfrac{b-a}{n}\right) \end{cases}.$$

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big)$. De plus,

– si f est croissante sur [a, b] : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq S_n$,

– si f est décroissante sur [a, b] : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq s_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_n et S_n constituent des valeurs approchées de $\int_a^b f(t)\,dt$ à $\frac{b-a}{n}\left|f(b) - f(a)\right|$ près, et on a :

$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(t)\,dt$.

▪ ***Valeur moyenne d'une fonction.*** Soient $(a, b) \in I^2$, $a < b$, et f une fonction continue sur [a, b]. On appelle valeur moyenne de f sur [a, b], le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Propriété : $\exists c \in \,]a, b[$, $\mu = f(c)$.

Inégalité de la moyenne : si f admet sur [a, b] m pour minimum et M pour maximum, on a : $m \leq \mu \leq M$.

VIII. Programme officiel

A la limite du programme :

- Stricte positivité de l'intégration,
- Stricte croissance de l'intégration,
- Si f est continue et de signe constant sur un segment [a, b] de $\mathbb{R}$ et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors : $\forall t \in [a, b]$, $f(t) = 0$.

Hors-programme :

- Formule d'intégration par parties itérée,
- Théorème de la moyenne.

Chapitre 14.
Intégration sur un segment

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche méthodologique

Dans toute la fiche méthodologique, les suites considérées sont des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n_0 désigne un entier naturel non nul fixé.

0. Apprendre et comprendre son cours

Penser que, avant d'écrire l'intégrale d'une fonction f qui n'est pas introduite dans l'énoncé, il faut toujours justifier au préalable la continuité (éventuellement par morceaux) de f sur l'intervalle sur lequel on intègre.

Il est possible que des intégrales existent bien que les fonctions en présence ne soient pas continues sur le segment en question, mais il s'agit alors d'intégrales généralisées (voir le chapitre "**Intégrales généralisées**").

I. Calculer une intégrale

1. A l'aide d'une primitive

Penser que si F est une primitive de f sur [a, b] (a < b), alors : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Pour calculer une intégrale, il est donc préférable de se demander, dans un premier temps, si l'on peut utiliser les primitives des fonctions usuelles. Pour obtenir une primitive d'une fonction, on peut :

– reconnaître une formule de dérivation,

– reconnaître une primitive usuelle, ou une somme de primitives usuelles de fonctions connues ou déjà déterminées dans l'exercice,

– <u>si la fonction que l'on intègre est une fonction rationnelle</u>, former une décomposition en éléments simples, comme somme de fonctions dont on connaît une primitive, en essayant de faire apparaître des réels $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et des fonctions polynomiales $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que : $\forall x \in [a, b]$, $f(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{P_i'(x)}{P_i(x)}$ (voir le chapitre "**Fractions rationnelles**"),

– <u>si la fonction est de la forme $x \mapsto \sin^n x \cos^m x$</u>, où $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, trois cas se présentent :

❑ <u>*si n est impair*</u>, $n = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$) : on peut, soit effectuer le changement de variable $u = \sin x$ (voir le point sur les règles de Bioche ci-dessous), soit :

– écrire, pour tout x, $\sin^n x$ sous forme : $\sin^n x = \sin x(1 - \cos^2 x)^p$,

– développer la puissance obtenue à l'aide de la formule du binôme (on obtient alors une somme de cosinus),

– après avoir multiplié le tout par $\cos^m x$, reconnaître dans f une somme de fonctions de la forme $x \mapsto \sin x \cos^q x$, dont on connaît des primitives, puis conclure à l'aide de la relation de Chasles ;

❑ <u>*si m est impair*</u>, $m = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$) : on peut, soit effectuer le changement de variable $u = \cos x$ (voir le point sur les règles de Bioche ci-dessous), soit :

– écrire, pour tout x, $\cos^m x$ sous forme : $\cos^m x = \cos x(1 - \sin^2 x)^p$,

– développer la puissance obtenue à l'aide de la formule du binôme (on obtient alors une somme de sinus),

– après avoir multiplié le tout par $\sin^n x$, reconnaître dans f une somme de fonctions de la forme $x \mapsto \sin^q x \cos x$, dont on connaît des primitives, puis conclure à l'aide de la relation de Chasles ;

❑ <u>*si m et n sont pairs*</u> : on peut linéariser les expressions en cos et sin à l'aide des formules d'Euler (voir le chapitre

"**Nombres complexes**").

☞ Voir les exercices "Recherche de primitives", "Primitives de fonctions rationnelles", "Primitives de fonctions contenant la racine carrée d'un trinôme", "Primitives de fonctions polynomiales en sin et cos".

☞ Voir également le chapitre "Fractions rationnelles" pour plus de détails sur les techniques de décomposition en éléments simples.

2. A l'aide d'une intégration par parties

Attention : avant de procéder à une intégration par parties, il faut toujours préciser que la fonction que l'on dérive est de classe C^1 et que la fonction que l'on intègre est continue sur l'intervalle considéré.

La règle "LPET" (ln, polynôme, exponentielle, trigonométrique) permet de se souvenir de l'ordre dans lequel on choisira de dériver les fonctions lorsqu'il s'agit de simplifier l'intégrale :

– ln,

– polynmiales,

– exponentielles,

– trigonométriques.

On intègre alors l'autre fonction.

Si, dans le deuxième cas, on doit dériver une fonction polynomiale de degré p ($p \in \mathbb{N}^*$), il faut en général effectuer p intégration(s) par parties avant d'aboutir au résultat. On peut le cas échéant utiliser la formule d'intégration par parties itérée (**hors-programme**, à savoir redémontrer).

Noter qu'en présence de fonctions trigonométriques, il est souvent utile d'effectuer (et il ne faut donc pas hésiter à le faire) deux intégrations par parties de suite. On obtient alors l'intégrale de départ I en fonction d'elle-même (par exemple : $I = \pi + 4I$), ce qui permet ensuite de détemriner la valeur de I en résolvant une équation élémentaire.

☞ Voir les exercices "Intégration par parties" et "Les intégrales $\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$ et $\int_0^1 t^{2p}(1-t^2)^q\,dt$".

☞ Voir également le chapitre "**Fractions rationnelles**" pour plus de détails sur les techniques de décomposition en éléments simples.

3. A l'aide d'un changement de variable

Pour calculer une intégrale, il est souvent utile de procéder à un changement de variable, afin de faire apparaître une fonction usuelle. Il existe deux types de changement de variable :

■ <u>pour effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$</u> dans une intégrale de la forme $\int_a^b h(t)\,dt$, où h est continue sur [a, b] (a < b) et où la variable d'intégration est t, on peut, si g est de classe C^1 sur [a, b], écrire cette intégrale sous la forme $\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\varphi([a, b])$, puis écrire :

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Il n'est pas nécessaire que φ soit bijective de [a, b] sur $\varphi([a, b])$. Cependant, si tel est le cas et si φ^{-1} est de classe C^1 sur $\varphi([a, b])$, alors on peut directement écrire : $t = \varphi^{-1}(u)$ et $dt = (\varphi^{-1})'(u)\,du$, et l'on a alors directement :

$$\int_a^b h(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} h(\varphi^{-1}(u))\,(\varphi^{-1})'(u)\,du.$$

▪ pour effectuer le changement de variable $t = \varphi(u)$ dans une intégrale de la forme $\int_a^b f(t)\,dt$, où f est continue sur [a, b] (a < b) et où la variable d'intégration est t, il faut déterminer deux réels c et d tels que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$ puis vérifier que g est de classe C^1 sur I = [c, d] (ou I = [d, c] si d < c) et que f est continue sur $\varphi(I)$. On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Il n'est pas nécessaire que g soit bijective de I sur [a, b]. Cependant, si g est bijective de I sur [a, b], alors $\varphi(I) = [a, b]$ donc f est nécessairement continue sur $\varphi(I)$. En outre, les réels c et d sont alors uniques.

Lorsque l'on effectue un changement de variable de la forme $u = \varphi(t)$, on écrit juste après : $du = \varphi'(t)\,dt$ en explicitant $\varphi'(t)$, et en précisant que φ est de classe C^1 sur le domaine décrit par t.

☞ Voir les exercices "Changement de variable", "Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos",

▪ Règles dites "de Bioche" : lorsque la fonction à intégrer est une fonction rationnelle des fonctions cosinus et sinus, les règles de Bioche permettent de déterminer le changement de variable à accomplir en priorité :

Si l'expression f(cos x, sin x) est invariante par le changement de variable :	Alors un changement de variable suivant est judicieux dans l'intégrale :
$u = -x$	$u = \cos x$
$u = x + \pi$	$u = \tan x$
$u = \pi - x$	$u = \sin x$
les trois opérations ci-dessus	$u = \cos 2x$

Ces règles sont officiellement **hors-programme**, mais il peut être utile de les connaître pour "deviner" les changements de variables non affines dans certains exercices.

☞ Voir les exercices "Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos" et "Primitives de fonctions rationnelles en sin et cos".

II. Déterminer un encadrement d'une intégrale

Attention : la comptabilité du passage à l'intégration avec la relation d'ordre (i.e. positivité, croissance de l'intégration, inégalité de la moyenne et sa conséquence) ne sont valables que lorsque les bornes de l'intégrale sont ordonnées dans le sens croissant. Si les bornes sont dans le sens décroissant, les inégalités changent de sens après passage à l'intégrale (et le résultat ne fonctionne plus pour l'inégalité de la moyenne ni pour sa conséquence). Dans certains cas, il peut être nécessaire d'opérer une distinction de cas.

En revanche, noter que les autres propriétés : linéarité, relation de Chasles, restent valables quel que soit la façon dont sont ordonnées les bornes de l'intégrale.

1. Utiliser la positivité ou la stricte positivité de l'intégration

Se souvenir que, si f est continue (éventuellement par morceaux) et positive sur [a, b] (**avec a < b**), alors : $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

Si f est continue, positive et non uniformément nulle sur [a, b], alors : $\int_a^b f(t)\,dt > 0$ (à la limite du programme).

2. Utiliser la croissance ou la stricte croissance de l'intégration

Se souvenir que si f et g sont continues (éventuellement par morceaux) sur [a, b] (**où a < b**) et si : $\forall t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors, par croissance de l'intégration : $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

Se souvenir également que si $\forall t \in [a, b]$, $f(t) < g(t)$, alors par stricte croissance de l'intégration : $\int_a^b f(t)\,dt < \int_a^b g(t)\,dt$.

Si f est un produit de fonctions, on peut majorer $\int_a^b f(t)dt$ en majorant certaines des fonctions constituant f.

3. Majorer la valeur absolue d'une intégrale

Se souvenir que, si f est continue (éventuellement par morceaux) sur [a, b] (où **a < b**) : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

☞ Voir l'exercice "Théorème de Riemann - Lebesgue".

4. Utiliser le théorème : "toute fonction continue sur un segment est bornée"

Se souvenir (voir la fiche de cours "**Fonctions : limite, continuité, dérivabilité**") que toute fonction continue sur un segment [a, b] est bornée (et atteint ses bornes) sur [a, b]. Cette propriété est particulièrement utile pour majorer des suites d'intégrales (voir point **III** ci-dessous).

En particulier, se souvenir que si f est de classe C^1 sur [a, b], une intégration par parties faisant apparaitre f' permet encore d'utiliser ce théorème sur la fonction f', continue sur [a, b].

☞ Voir l'exercice "Théorème de Riemann - Lebesgue".

III. Etudier une suite d'intégrales du type $(I_n(f)) = \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

1. Déterminer une expression du terme général d'une suite d'intégrales

Une intégration par parties peut permettre de faire apparaître, si l'intégrale dépend d'un paramètre entier n, une relation entre $I_{n+1}(f)$et $I_n(f)$ ou $I_{n+2}(f)$ et $I_n(f)$: on peut alors raisonner par récurrence pour calculer I_n.

☞ Voir l'exercice "Intégrales de Wallis".

2. Etudier la monotonie d'une suite d'intégrales

Pour montrer que la suite $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante), on peut :

– déterminer, à l'aide d'une ingégration par parties, une relation entre I_{n+1} et $I_n(f)$ et utiliser directement la relation obtenue,

– montrer que : $\forall t \in [a, b]$, $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ (resp. $f_n(t) \geq f_{n+1}(t)$, puis utiliser la croissance de l'intégration en prenant soin de s'intéresser au positionnement des bornes d'intégration l'une par rapport à l'autre (sinon, se reporter au point II ci-dessus),

– former, pour tout entier naturel n, la différence $I_{n+1}(f) - I_n(f)$ (à l'aide de la linéarité de l'intégration) puis étudier son signe, généralement à l'aide de la positivité de l'intégration (voir point II ci-dessus).

☞ Voir l'exercice "Intégrales de Wallis".

3. Déterminer la limite d'une suite d'intégrales

Lorsqu'on cherche à déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il faut en général chercher à déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, un encadrement de $I_n(f)$ (voir point II ci-dessus), puis utiliser le théorème de l'encadrement. Attention à ne pas encadrer "n" luimême car l'objectif est de pouvoir terminer le raisonnement à l'aide du théorème de l'encadrement : il est donc nécessaire de conserver des expressions faisant intervenir "n" dans l'encadrement obtenu, et il faut privilégier les encadrement des éléments ne dépendant pas de n.

Lorsque les fonctions à intégrer ne sont pas de signe constant, il arrive fréquemment que pour encadrer la suite d'intégrales, on utilise d'abord une majoration de la valeur absolue de l'intégrale (à l'aide de la conséquence de l'inégalité de la moyenne.

Attention : dans le cas général, il est faux de dire que : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))\,dt$ (on ne peut donc calculer la limite "à l'intérieur de l'intégrale"). Ce n'est valable qu'à certaines conditions (voir le chapitre "**Suites et séries de fonctions**", **hors-programme** en première année).

☞ Voir l'exercice "Théorème de la moyenne".

IV. Etudier une fonction ou une suite définie à l'aide d'une intégrale dont les bornes sont variables

1. Montrer qu'une fonction définie à l'aide d'une intégrale est de classe C^1

Se souvenir que, si f est continue sur [a, b] (a < b), alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur [a, b] en tant que primitive d'une fonction continue sur [a, b]. Plus généralement, si f est de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur [a, b], alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^{n+1} sur [a, b].

☞ Voir l'exercice "Intégrales de Wallis".

2. Etudier une suite définie à l'aide d'une intégrale dont les bornes sont variables

Pour étudier une suite définie à l'aide d'une intégrale dont les bornes sont variables (i.e., généralement, une suite définie comme solution d'une équation), il faut généralement invoquer le théorème de la bijection pour montrer que la suite est parfaitement définie, puis, le plus souvent, procéder par encadrement à l'aide des méthodes décrites ci-dessus. Le théorème de l'encadrement permet généralement de conclure et permet souvent de déterminer un équivalent de la suite en question.

☞ Voir l'exercice "Étude d'une suite définie à l'aide d'une intégrale" et le chapitre "**Suites**".

3. Dériver une fonction définie à l'aide d'une intégrale (la variable x étant aux bornes)

Se souvenir que, si φ et ψ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si f admet une primitive F sur l'intervalle J (avec $\varphi(I) \subset J$ et $\psi(I) \subset J$) alors la fonction $g : x \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$ est dérivable sur I car φ et ψ sont dérivables sur I à valeurs dans J et F est dérivable sur J, et sa dérivée est : $\forall x \in I,\ g'(x) = \psi'(x) f(\psi(x)) - \varphi'(x) f(\varphi(x))$.

☞ Voir l'exercice "Dérivation sous le signe intégral".

V. Intégrales à paramètres : continuité, dérivabilité d'une fonction définie à l'aide d'une intégrale (la variable x étant à l'intérieur de l'intégrale)

Si la variable x est "dans l'intégrale", les méthodes permettant de passer à la limite ou de dériver "sous le signe intégral" **ne font pas partie du cours en première année** (elle sont au programme en maths spé uniquement). Se souvenir que ni le passage à la limite ni la dérivation sous le signe intégral ne sont licites dans le cas général.

D'autres démonstrations existent toutefois (abordables en première année et donc éventuellement pouvant tomber aux concours Mines Sup), utilisant les résultats du chapitre "**Formules de Taylor. Développements limités**". Ces méthodes ne sont pas exigibles des candidats de première année mais il peut être intéressant d'en connaître les principales étapes.

☞ Voir l'exercice "Étude de fonctions définies à l'aide d'une intégrale", et le chapitre de maths spé "**Intégration sur un segment**" (**hors-programme** en première année).