Chapitre 13-B.
Fonctions : dérivabilité, convexité

Maths SUP

OPTIMAL *SUP-SPE*

Fiche de cours

Dans tout le cours, sauf précision contraire, les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

A. Dérivabilité

I. Dérivation

1. Dérivée en un point

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.

▪ f est dérivable en x_0 si la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par : $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie ℓ en x_0. ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = D_f(x_0) = \ell$. Il existe alors une fonction ε de limite nulle en x_0 telle que : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$ (développement limité de f d'ordre 1 au voisinage de x_0).

- Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.
- Si f est dérivable en x_0, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$ est : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

▪ f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 si la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par : $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie ℓ à droite (resp. à gauche) en x_0. ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f à droite (resp. à gauche) en x_0 et on note $f_d'(x_0) = \ell$ (resp. $f_g'(x_0) = \ell$).

Si f est dérivable à droite en a (resp. à gauche), la demi-droite d'équation $y = f(x_0) + (x - x_0) f_d'(x_0)$ (resp. $y = f(x_0) + (x - x_0) f_g'(x_0)$) s'appelle la demi-tangente à droite (resp. à gauche) à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$.

▪ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions dérivables en x_0 est dérivable en x_0.

Si f est dérivable en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $(g \circ f)$ est dérivable en x_0.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$.

2. Fonctions dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I.

▪ f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est notée $f' = \frac{df}{dx} = D_f$.

▪ Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

■ Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, puissances, logarithmes, exponentielles sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf en 0 pour les fonctions puissance α avec $0 < \alpha < 1$.

■ La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions dérivables sur I est dérivable sur I.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que $f(I) \subset J$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $(g \circ f)$ est dérivable sur I.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Si f est dérivable sur I et si $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur f(I).

■ ***Opérations sur les dérivées :***

- $(f+g)' = f' + g'$,
- $(\lambda f)' = \lambda f'$,
- $(fg)' = f'g + g'f$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$,
- $(f^n)' = n f^{n-1} f'$,
- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$,
- $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

■ ***Dérivées des fonctions usuelles :***

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_-^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{d(x^\alpha)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{d(\ln|x|)}{dx} = \dfrac{1}{x}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp)'(x) = e^x$,
- $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\sin)'(x) = \cos x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\cos)'(x) = -\sin x$,
- $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{sh})'(x) = \text{ch}\, x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{ch})'(x) = \text{sh}\, x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}^*, (\text{th})'(x) = \dfrac{1}{\text{sh}^2 x}$,
- $\forall x \in]-1, 1[, (\text{Arccos})'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\forall x \in]-1, 1[, (\text{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

• $\forall x \in]1, +\infty[$, $(\text{Argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$,

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\text{Argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$,

• $\forall x \in]-1, 1[$, $(\text{Argth})'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

3. Fonctions de classe C^n

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I.

▪ ***Fonctions de classe C^n.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe C^n sur I si f est dérivable n fois sur I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$, notée $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$ est continue sur I. On note $C^n(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe C^n sur I alors f et f' sont de classe C^{n-1} sur I.

▪ ***Fonctions de classe C^∞.***

f est de classe C^∞ (ou infiniment continue et dérivable) sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I. On note $C^\infty(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

▪ Les fonctions polynômes, rationnelles, circulaires, puissances, logarithmes, exponentielles sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition sauf en 0 pour les fonctions puissance α avec $0 < \alpha < 1$.

▪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions de classe C^n sur I est de classe C^n sur I.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point tels que $f(I) \subset J$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J. Si f est de classe C^n sur I et g est de classe C^n sur J, alors $(g \circ f)$ est de classe C^n sur I.

▪ ***Formule de Leibniz.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I. On a : $\forall x \in I$, $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$.

II. Théorèmes de division

1. Extrema et sens de variation de fonctions dérivables

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités éventuelles, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.

▪ ***Extrema locaux de fonctions dérivables.*** f admet un maximum (resp. minimum) local en x_0 si :
$\exists \alpha > 0$, $\forall x \in I$, $(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \leq f(x_0))$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

f admet un extremum local (ou extremum) en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0. f admet un extremum global en x_0 si : $\forall x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$ ou si : $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$.

▪ Si f est dérivable sur I et admet un extremum local en x_0 et que $x_0 \in \mathring{I}$, alors $f'(x_0) = 0$.

▪ ***Sens de variation de fonctions dérivables.*** Soit $\mathring{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités éventuelles et f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

❑ f est croissante sur I si : $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \geq 0$,

❑ f est décroissante sur I si : $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) \leq 0$,

❑ f est constante sur I si : $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$,

❑ f est strictement croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) > 0$, sauf éventuellement sur un ensemble de points ne contenant pas d'intervalle non réduit à un point,

❑ f est strictement décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $f'(x) < 0$, sauf éventuellement sur un ensemble de points ne contenant pas d'intervalle non réduit à un point.

2. Théorème de Rolle. Théorème et inégalités des accroissements finis

■ ***Théorème de Rolle.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. On a alors : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

N.B. : Le théorème de Rolle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes.

■ ***Théorème (ou égalité, ou formule) des accroissements finis.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On a alors : $\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

■ ***Inégalités des accroissements finis.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

· Soient M un réel positif ou nul et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec : $\forall t \in]a, b[, |f'(t)| \leq M$. On a : $|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$, et plus généralement : $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq M(y - x)$, i.e. : f est M-lipschitzienne sur $[a, b]$.

· Soient m et M deux réels tels que $m \leq M$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec : $\forall t \in]a, b[, m \leq f'(t) \leq M$. On a : $m \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$, et plus généralement : $\forall (x, y) \in [a, b]^2 / x \neq y, m \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M$.

3. Théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 (ou théorème de prolongement de la dérivée)

■ ***Théorème de prolongement des fonctions de classe C^1.*** Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b]$. Si f' admet une limite finie en a, alors f est de classe C^1 sur $[a, b]$.

■ ***Corollaire.*** Si $\lim\limits_{x_0^\pm} f' = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en x_0.

■ ***Théorème de prolongement des fonctions de classe C^p (à la limite du programme).*** Soient p un entier naturel non nul, a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe C^p sur $]a, b]$. Si $f^{(p)}$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $C^{(p)}$ sur $[a, b]$.

Ces résultats peuvent être étendus au cas où $a = -\infty$, et au cas où la fonction présente un problème en b (où $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$) *et non en a.*

B. Convexité

III. Fonctions convexes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction définie sur I.

1. Définitions

■ ***Définition.*** f est convexe sur I si : $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$.

■ ***Propriété.*** Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et f une fonction convexe sur I. On a plus généralement (inégalité de Jensen) : $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in I^p, \forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in [0, 1]^p / \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, f\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$.

■ f est concave sur I si (-f) est convexe sur I.

2. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une fonction deux fois dérivable sur I. Si : $\forall x \in \mathring{I}$, $f''(x) \geq 0$, alors f est convexe sur I.

3. Propriétés des fonctions convexes

Si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, les propriétés suivantes sont équivalentes :

– f est convexe sur I,

– f' est croissante sur I,

– sa courbe représentative est "au-dessus" de chacune de ses tangentes,

– sa courbe représentative est "en-dessous" de chacune des cordes qu'elle sous-tend.

C. Représentation graphique

I. Tangentes, éléments de symétrie et points d'inflexion

1. Tangentes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, et $a \in I$.

• Si f est dérivable en a, alors la courbe représentative de f admet une tangente en (a, f(a)), d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$,

• Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou si f est dérivable au voisinage de a avec $\lim\limits_{a} f' = \pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale en (a, f(a)).

2. Eléments de symétrie dans un repère orthogonal

▪ ***Symétrie axiale.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Si : $\forall x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = f(x)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$.

▪ ***Symétrie centrale.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a et b deux réels et f une fonction définie sur I. Si, pour tout $x \in I$, $(2a - x) \in I$ et : $\forall x \in I$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b).

3. Points d'inflexion

▪ ***Définition.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, a un élément de I, α un réel strictement positif tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset I$ et f une fonction définie sur I. Si f est convexe sur $]a - \alpha, a]$ (resp. sur $[a, a + \alpha[$) et concave sur $[a, a + \alpha[$ (resp. sur $]a - \alpha, a]$), alors la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)).

▪ ***Propriété.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et une fonction de classe C^2 sur I. La courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)) si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a.

II. Branches infinies

Soit f une fonction, et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative :

- Si $\lim\limits_{b^\pm} f = \pm\infty$ ($b \in \mathbb{R}$), $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote verticale d'équation $x = b$.*
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = b$ ($b \in \mathbb{R}$), $\mathscr{C}_f$ admet une *asymptote horizontale d'équation $y = b$.*
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f = \pm\infty$,
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique verticale.*
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique horizontale.*
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$), il faut étudier la fonction $x \mapsto f(x) - ax$,
    - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$), la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$,
    - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ admet une *branche parabolique* de direction la droite d'équation $y = ax$,
    - si $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ et $x \mapsto f(x) - ax$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$, $\mathscr{C}_f$ n'admet ni asymptote ni branche parabolique.

D. Fonctions à valeurs complexes

I. Fonctions usuelles

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I **à valeurs complexes** (i.e. à valeurs dans une partie de $\mathbb{C}$). On définit sur I les fonctions $\mathcal{Re}(f)$, $\mathcal{Im}(f)$, $|f|$ et $\bar{f}$ par :

$$\cdot\ \forall x \in I,\ \begin{cases} (\mathcal{Re}(f))(x) = \mathcal{Re}(f(x)) \\ (\mathcal{Im}(f))(x) = \mathcal{Im}(f(x)) \\ |f|(x) = |f(x)| \\ \bar{f}(x) = \overline{f(x)} \end{cases}$$

N.B. : Les fonctions $\mathcal{Re}(f)$, $\mathcal{Im}(f)$ et $|f|$ sont des fonctions à valeurs réelles, et $\bar{f}$ est une fonction à valeurs complexes.

II. Limite, continuité

1. Limite en x_0 ($x_0 \in I$)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I **à valeurs complexes** (i.e. à valeurs dans une partie de $\mathbb{C}$).

- ***Limite en x_0 ($x_0 \in I$).*** f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{C}$) en x_0 si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f$, ($|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ ou $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$) *(la notation $|\,.\,|$ désignant ici le module et non la valeur absolue).*

On note : $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} f$.

■ ***Propriété.*** f admet pour limite ℓ ($\ell \in \mathbb{C}$) en x_0 si, et seulement si :

$$\forall x \in I, \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} (\mathcal{Re}(f))(x) = \mathcal{Re}(\ell) \\ \lim\limits_{x \to x_0} (\mathcal{Im}(f))(x) = \mathcal{Im}(\ell) \end{cases}.$$

■ ***Limite d'une fonction composée.*** Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, g une fonction définie sur I à valeurs réelles tels que $g(I) \subset J$ et f une fonction définie sur J à valeurs complexes. Si $\lim\limits_{x_0} g = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) et si $\lim\limits_{\ell} f = \ell'$ ($\ell' \in \mathbb{C}$), alors : $\lim\limits_{x_0} (f \circ g) = \ell'$.

2. Continuité en x_0 ($x_0 \in I$)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I **à valeurs complexes** (i.e. à valeurs dans une partie de $\mathbb{C}$).

■ ***Définitions.*** f est continue en x_0 si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

■ ***Propriétés :***

• f est continue en x_0 si, et seulement si, les fonctions $\mathcal{Re}(f)$ et $\mathcal{Im}(f)$ le sont.

• Le produit, la somme, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions à valeurs complexes continues en x_0 est continue en x_0.

Soit g une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de x_0. Si g est continue en x_0 et si f est continue en $g(x_0)$, alors la fonction à valeurs complexes ($f \circ g$) est continue en x_0.

3. Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I **à valeurs complexes** (i.e. à valeurs dans une partie de $\mathbb{C}$).

■ ***Définitions.***

• f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

• On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes continues sur I.

■ ***Propriétés :***

• Le produit, la somme, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions à valeurs complexes continues sur I est continue sur I.

• Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, g une fonction définie sur I à valeurs réelles tels que $g(I) \subset J$ et f une fonction définie sur J à valeurs complexes. Si g est continue sur I et si f est continue sur J, alors la fonction à valeurs complexes ($f \circ g$) est continue sur I.

III. Fonctions bornées

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction **à valeurs complexes** définie sur I.

• f est bornée sur I si : $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in I, \ |f(x)| \leq M$.

• Soit $x_0 \in I$. Si f admet une limite en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0.

IV. Dérivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I **à valeurs complexes**.

1. Dérivabilité en x_0 ($x_0 \in I$)

▪ ***Définition.*** f est dérivable en x_0 si la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par : $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$. ℓ alors appelé le nombre dérivé de f en x_0 et on note $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0) = D_f(x_0) = \ell$. Il existe alors une fonction ε de limite nulle en x_0 telle que au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\varepsilon(x)$.

▪ ***Propriété.*** f est dérivable en x_0 si, et seulement si, les fonctions $\mathcal{Re}(f)$ et $\mathcal{Im}(f)$ le sont, et l'on a alors :
$f'(x_0) = (\mathcal{Re}(f))'(x_0) + i\,(\mathcal{Im}(f))'(x_0)$.

2. Dérivabilité sur un intervalle, opération sur les fonctions dérivables

▪ f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.

▪ ***Propriétés :***

• Le produit, la somme, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions à valeurs complexes dérivables sur I est dérivable sur I.

• Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, g une fonction définie sur I à valeurs réelles tels que $g(I) \subset J$ et f une fonction définie sur J à valeurs complexes. Si g est dérivable sur I et si f est dérivable sur J, alors la fonction à valeurs complexes $(f \circ g)$ est dérivable sur I.

▪ ***Opérations sur les dérivées.*** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f et g deux fonctions définies sur I à valeurs complexes. On a :

• $(f + g)' = f' + g'$,

• $(\lambda f)' = \lambda f'$,

• $(fg)' = f'g + g'f$,

• $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$,

• $(f^n)' = n f^{n-1} f'$,

• Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et g une fonction définie sur I à valeurs réelles tels que $g(I) \subset J$. Si g est dérivable sur I et à valeurs dans J et si f est dérivable sur J, alors la fonction à valeurs complexes $(f \circ g)$ est dérivable sur I, et : $(f \circ g)' = (f' \circ g) \times g'$.

▪ ***Caractérisation des fonctions constantes.*** f est constante sur I si, et seulement si : $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

3. Fonctions de classe C^n

▪ ***Fonctions de classe C^n.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. f est de classe C^n sur I si f est dérivable n fois sur I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$, notée $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$ est continue sur I. On note $C^n(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe C^n sur I alors f et f' sont de classe C^{n-1} sur I.

▪ ***Fonctions de classe C^∞.***

f est de classe C^∞ (ou infiniment continue et dérivable) sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I. On note $C^\infty(I)$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

■ ***Propriétés :***

• Le produit, la somme, le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions à valeurs complexes de classe C^n sur I est dérivable sur I.

• Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point, g une fonction définie sur I à valeurs réelles tels que $g(I) \subset J$ et f une fonction définie sur J à valeurs complexes. Si g est de classe C^n sur I et si f est de classe C^n sur J, alors la fonction à valeurs complexes $(f \circ g)$ est de classe C^n sur I.

■ ***Formule de Leibniz.*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f et g deux fonctions n fois dérivables sur I à valeurs complexes. Alors fg est n fois dérivable sur I et on a : $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$.

4. Inégalité des accroissements finis

■ Soit $(a, b) \in I^2$, avec $a < b$. Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors f' est bornée sur $[a, b]$, et on a : $|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a,b]} |f'|\,(b - a)$.

N.B. : Le théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis ainsi que le théorème de Rolle ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

E. Programme officiel

Hors programme :

- Théorème de prolongement des fonctions de classe C^p avec $p \geq 2$.

A la limite du programme :

- Fonction de classe C^1 par morceaux.
- Les dérivées des fonctions Argch, Argsh et Argth.